ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1) - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (α) Α1β. (γ)

Α2α. (γ) Α2β. (δ)

Α3α. (α) Α3β. (γ)

Α4α. (β) Α4β. (δ)

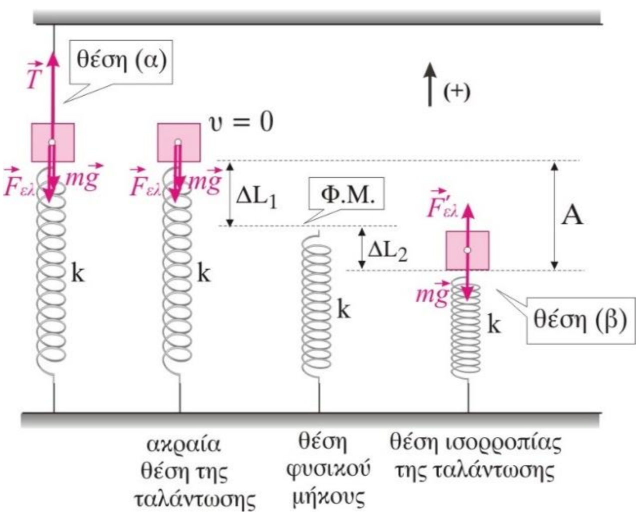
Α5. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή είναι η (β).

Στη θέση (α) το σώμα ισορροπεί. Επομένως

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; T - mg - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \;\Rightarrow$$
$$3mg - mg - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \;\Rightarrow$$
$$F_{\varepsilon\lambda} = 2mg \;\Rightarrow k \cdot \Delta L_1 = 2mg \;\Rightarrow$$
$$\Delta L_1 = \frac{2mg}{k} \;, \quad (1)$$



Άρα, πριν κοπεί το νήμα το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta L_1 = 2mg / k$ από το φυσικό του μήκος.

Όταν το νήμα κοπεί το σώμα εκτελεί α.α.τ. γύρω από θέση ισορροπίας για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; mg - F'_{\varepsilon\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; F'_{\varepsilon\lambda} = mg \;\Rightarrow\; k \cdot \Delta L_2 = mg \;\Rightarrow\; \Delta L_2 = \frac{mg}{k} \;, \quad (2)$$

Άρα, στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $\Delta L_2 = \dfrac{mg}{k}$ από το φυσικό του μήκος.

Όταν το νήμα κοπεί, το σώμα ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση (α) η οποία αντιστοιχεί στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, η οποία απέχει $\Delta L_1 + \Delta L_2$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Άρα, το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = \Delta L_1 + \Delta L_2 \;\Rightarrow\; A = \frac{3mg}{k}$$

Στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k \cdot \Delta L_1^2 = \frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{2mg}{k}\right)^2, \quad (4)$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_T = \frac{1}{2}D \cdot A^2$ όπου *D*=*k*.

$$E_T = \frac{1}{2}k \cdot A^2 = \frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{3mg}{k}\right)^2, \quad (5)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (5) παίρνουμε

$$\frac{U_{\varepsilon\lambda}}{E_T} = \frac{\frac{1}{2}k\left(\frac{2mg}{k}\right)^2}{\frac{1}{2}k\left(\frac{3mg}{k}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

Β2. Σωστή επιλογή είναι η (γ).

Οι φάσεις των δύο ταλαντώσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$\varphi_A = \omega_A t$, $\varphi_B = \omega_B t$ και παρουσιάζουν διαφορά φάσης που δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_A - \varphi_B = (\omega_A - \omega_B)t.$$

Από το διάγραμμα της διαφοράς φάσης - χρόνου προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή *t=2s* η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι *16π*, επομένως

$16\pi=(2\pi f_A-2\pi f_B)2$ ή $f_A-f_B=4Hz$, (1)

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους αντιστοιχεί σε μία περίοδο διακροτήματος, επομένως

$$T_\delta = \frac{1}{f_A - f_B} = 0,25s \quad , \quad (2)$$

Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου, T_δ, το σώμα εκτελεί *N* ταλαντώσεις με περίοδο $\overline{T}$.

Εφόσον η κινητική ενέργεια μηδενίζεται *250* φορές, γίνονται *N =125* ταλαντώσεις (σε κάθε περίοδο έχουμε 2 μηδενισμούς της κινητικής ενέργειας).

$$N \cdot \overline{T} = T_\delta \Rightarrow \overline{T} = \frac{T_\delta}{N} = \frac{0,25s}{125} = \frac{1}{500}s$$

Η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\bar{T} = \frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{\frac{f_A + f_B}{2}} = \frac{2}{f_A + f_B} \Rightarrow \frac{1}{500} = \frac{2}{f_A + f_B} \Rightarrow f_A + f_B = 1000\,Hz \quad , (3)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (3) παίρνουμε

$$\xrightarrow{(1),(3)} 2f_A = 1004\,Hz \Rightarrow f_A = 502\,Hz$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε f_B*=498Hz*.

Β3. Σωστή επιλογή είναι η (γ).

Από την καμπύλη συντονισμού (διάγραμμα πλάτους - συχνότητα του διεγέρτη) παρατηρούμε τα εξής:

$$f_{oA} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_A}} = 4f_1 \;,\; (1)$$
$$f_{oB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_B}} = 3f_1 ,\; (2)$$

Διαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{f_{oA}}{f_{oB}} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{m_B}{m_A} = \frac{16}{9} \Rightarrow m_B = \frac{16}{9}m_A$$

Με τα δύο σώματα τοποθετημένα στον δίσκο, η καμπύλη συντονισμού παρουσιάζει μέγιστο στη συχνότητα

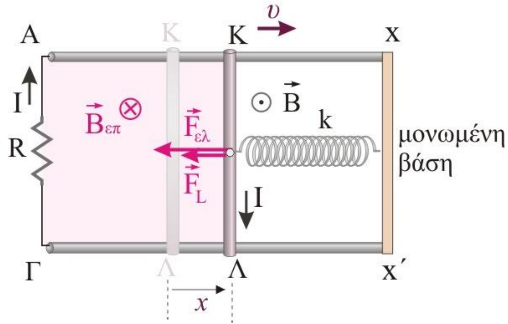
$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_A + \frac{16}{9}m_A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{25}{9}m_A}} \Rightarrow f_o = \frac{3}{5}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_A}} = \frac{3}{5}f_{oA} \Rightarrow f_o = 0{,}6\,f_{oA}$$

Άρα, το ζητούμενο ποσοστό μεταβολής είναι:

$$\Pi\% = \frac{f_o - f_{oA}}{f_{oA}}100\% = \frac{0{,}6\,f_{oA} - f_{oA}}{f_{oA}}100\% \Rightarrow \Pi\% = -40\%$$

Β4. Σωστή επιλογή είναι η (α).

Όταν αφήσουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο, θα κινηθεί προς τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου με αποτέλε-



σμα η μαγνητική ροή που διέρχεται από το κλειστό πλαίσιο ΑΚΛΓΑ να αυξηθεί και να εμφανιστεί επαγωγική τάση η οποία δίνεται από τη σχέση

$$E_{\varepsilon\pi} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{\Phi_{\tau\varepsilon\lambda} - \Phi_{\alpha\rho\chi}}{dt} = \frac{BS_{\tau\varepsilon\lambda} - BS_{\alpha\rho\chi}}{dt} \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\left(S_{\tau\varepsilon\lambda} - S_{\alpha\rho\chi}\right)}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BLdx}{dt}$$

Όμως, $\frac{dx}{dt}$ μας κάνει την ταχύτητα του αγωγού, άρα η σχέση γίνεται:

$$E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon L$$

Επειδή έχουμε κλειστό κύκλωμα, κυκλοφορεί επαγωγικό ρεύμα του οποίου η ένταση είναι

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} = \frac{B\upsilon L}{R}$$

Εξαιτίας του επαγωγικού ρεύματος εμφανίζεται δύναμη Laplace η οποία, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, αντιτίθεται στην κίνηση του αγωγού ΚΛ και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$$F_L = BIL = B\frac{B\upsilon L}{R}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2L^2}{R}\upsilon.$$

Στην τελευταία σχέση τα μεγέθη B^2, L^2, R είναι χρονικά σταθερά και το μόνο μέγεθος που μεταβάλλεται είναι η ταχύτητα υ.

Παρατηρούμε ότι στην τυχαία θέση που απέχει x από τη Θ.Ι., που είναι και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, στον αγωγό ασκούνται εκτός από τη δύναμη επαναφοράς, που στην περίπτωσή μας είναι η δύναμη του ελατηρίου και μια δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση του αγωγού και είναι της μορφής $F_{\alpha\nu\tau}=-b\upsilon$ με $b=B^2L^2/R$.

Επομένως ο αγωγός θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση με τη δύναμη αντίστασης να είναι της μορφής $F_{\alpha\nu\tau} = -b\upsilon$.

Θέμα Γ

Γ1. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης $x=f(t)$ του ξύλινου σώματος Σ_1, γύρω από τη θέση ισορροπίας του Ο, είναι της μορφής:

$$x = A\cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o) \quad , \quad (1)$$

Από τη γραφική παράσταση παίρνουμε τις τιμές $\upsilon_{max}=0{,}2m/s$ και $T=\pi/5\ s$.

Από την περίοδο βρίσκουμε την κυκλική συχνότητα, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\ rad/s$

Από την υ_{max} υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης.

$$\upsilon_{\max} = \omega \cdot A \;\Rightarrow\; A = \frac{\upsilon_{\max}}{\omega} = \frac{0,2\frac{m}{s}}{10\frac{rad}{s}} \;\Rightarrow\; A = 0,02m$$

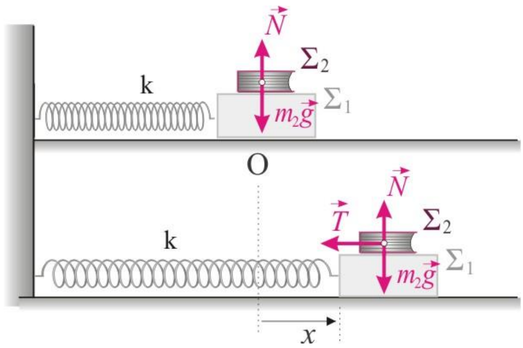
Επίσης παρατηρούμε ότι την *t=0* η ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική και μετά από *T/4* έχει μέγιστη αρνητική τιμή, άρα το σώμα την *t=0* βρίσκεται στην ακραία θετική θέση (*x=+A*) και έχει αρχική φάση $\varphi_o=\pi/2\ rad$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$x = 0,02 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ ,\ \ (S.I.)$$

Γ2. Το Σ_2 είναι μέρος ενός συστήματος που ταλαντώνεται, επομένως πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στον άξονα κίνησής του να δημιουργούν την απαιτούμενη δύναμη επαναφοράς, η οποία περιγράφεται από τη σχέση $F_{\varepsilon\pi} = -D_2 x = -m_2\,\omega^2 x$ και μεγιστοποιείται όταν το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις.

Σε μια τυχαία θέση που απέχει *x* από τη θέση ισορροπίας, στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:



- το βάρος του $m_2\vec{g}$
- η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από το Σ_1.
- η τριβή $\vec{T}$ που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο επιφανειών.

Άρα, τη δύναμη επαναφοράς για το σώμα Σ_2 μπορεί να τη δημιουργήσει μόνο η τριβή .

Για να δείξουμε ότι το Σ_2 δεν ολισθαίνει πάνω στο Σ_1 αρκεί να αποδείξουμε ότι η *T* παραμένει στατική, δηλαδή οι απαιτήσεις για $\left|F_{\varepsilon\pi(\max)}\right|$ παραμένουν μικρότερες από την $T_{o\rho}$.

$$\left|F_{\varepsilon\pi(\max)}\right| = m_2\,\omega^2 A = 0,1kg\cdot\left(10\frac{rad}{s}\right)^2\cdot 0,02m \;\Rightarrow \left|F_{\varepsilon\pi(\max)}\right| = 0,2N$$

Η οριακή τριβή μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 δίνεται από τη σχέση

$$T_{o\rho} = \mu_o\cdot N = \mu_o\cdot m_2 g = 0,5\cdot 0,1kg\cdot 10\frac{m}{s^2} \;\Rightarrow T_{o\rho} = 0,5N$$

Εφόσον $\left|F_{\varepsilon\pi(\max)}\right| < T_{o\rho}$, η *T* είναι στατική και το Σ_2 δεν ολισθαίνει ως προς το Σ_1.

Γ3. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του Σ_2 ισούται με

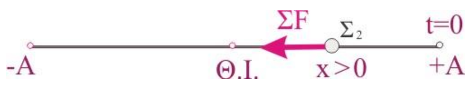
$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -m_2\omega^2 x \quad , \quad (2)$$

Αφού το Σ_2 δεν ολισθαίνει, έχει την ίδια ταχύτητα με το σώμα Σ_1. Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του Σ_2 θα υπολογίσουμε τη θέση x_1 όπου αυτό αποκτά ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10\sqrt{3}\, cm/s$ για πρώτη φορά.

$$K_1 + U_1 = E_T \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 x_1^2 = \frac{1}{2}m_2\omega^2 A^2 \;\Rightarrow$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 A^2 - \upsilon_1^2}{\omega^2}} = \pm\sqrt{\frac{\left(10\frac{rad}{s}0,02m\right)^2 - \left(0,1\sqrt{3}\frac{m}{s}\right)^2}{\left(10\frac{rad}{s}\right)^2}} \;\Rightarrow\; x_1 = \pm 0,01m$$

Το σώμα ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση $x=+A$ και θα βρεθεί για πρώτη φορά στη θέση x_1 πλησιάζοντας προς τη θέση ισορροπίας του, άρα $x_1>0$ και αποδεκτή τιμή είναι $x_1 = +0,01m$



Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε

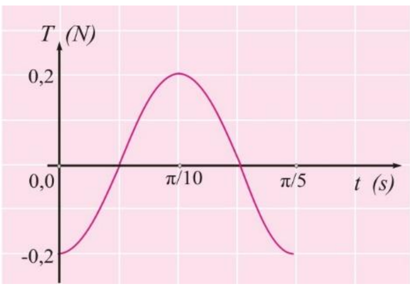
$$\frac{dp}{dt} = -0,1kg\left(10rad/s\right)^2 \cdot 0,01m \;\Rightarrow\; \frac{dp}{dt} = -0,1\frac{kg\,m}{s^2}$$

Γ4. Η στατική τριβή, T, είναι η δύναμη επαναφοράς για το Σ_2 και δίνεται από τη σχέση

$$T = -D_2 \cdot x = -m_2\omega^2 x \;\Rightarrow$$

$$T = -0,1kg \cdot \left(10rad/s\right)^2 \cdot 0,02m \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow$$

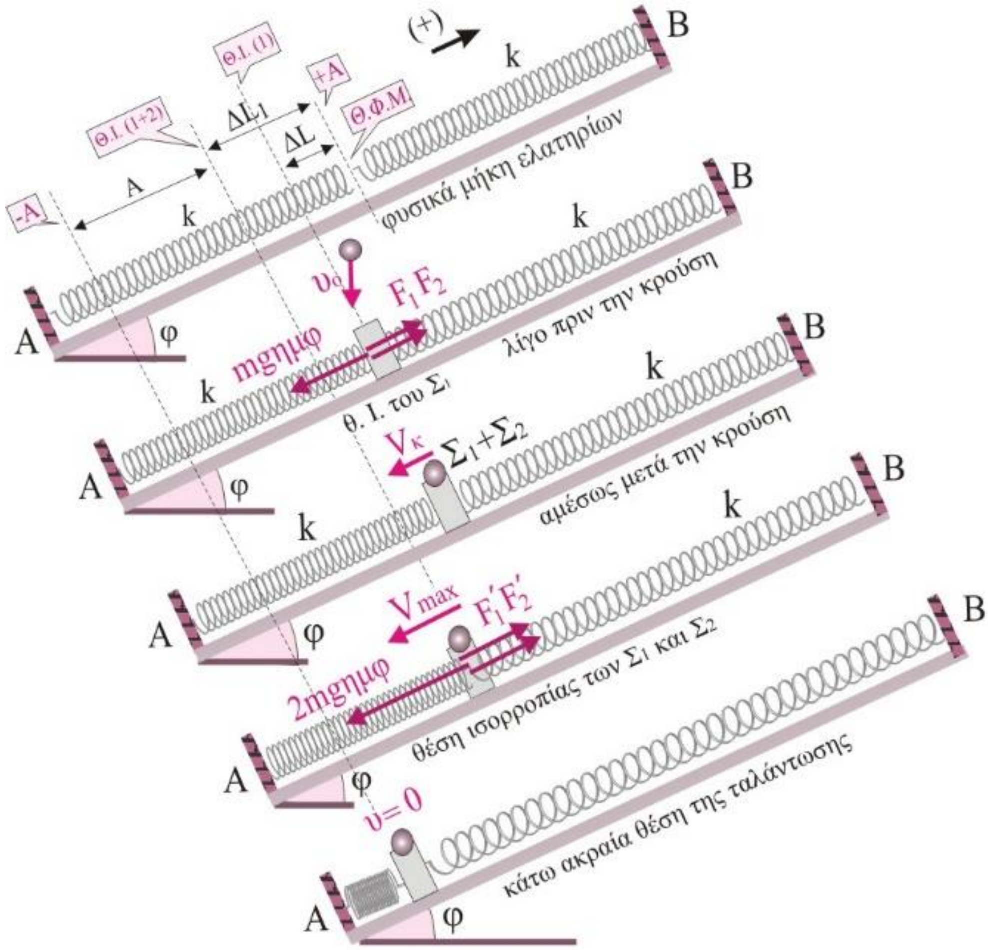
$$T = -0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad (S.I.)$$



Η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

Θέμα Δ

Δ1. Στην αρχική θέση ισορροπίας του Σ_1 τα ελατήρια είναι παραμορφωμένα κατά ΔL και ισχύει:



$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; F_1 + F_2 - m_1 g\eta\mu\varphi = 0 \;\Rightarrow 2k\cdot\Delta L = m_1 g\eta\mu\varphi \quad , \quad (1)$$

Μετά την πλαστική κρούση, το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα εκτελεί α.α.τ. γύρω από θέση ισορροπίας όπου τα ελατήρια είναι παραμορφωμένα κατά ΔL_1. Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; F_1' + F_2' - (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi \Rightarrow\; 2k\cdot\Delta L_1 = 2m_1 g\eta\mu\varphi \quad , \quad (2)$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε ότι $\Delta L_1 = 2\Delta L$.

Άρα τη χρονική στιγμή $t=0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = \Delta L_1 - \Delta L = \Delta L$.

Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης με αριθμητική αντικατάσταση για τη χρονική στιγμή $t=0$, παίρνουμε x_1=0,03m, άρα και ΔL=0,03m

Λύνοντας τη σχέση (1) ως προς k και αντικαθιστώντας παίρνουμε:

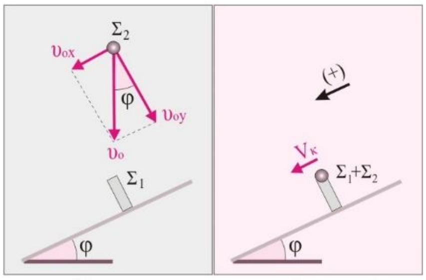
$$k = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{2\Delta L} = \frac{1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,6}{2\cdot 0,03m} \;\Rightarrow\; k = 100\frac{N}{m}$$

Δ2. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα εκτελεί ταλάντωση πλάτους *A=0,06m*. Εφαρμόζουμε την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων, αμέσως μετά την κρούση και της κάτω ακραία θέσης της ταλάντωσης.

$$K+U=U_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}2m_1V_K^2+\frac{1}{2}2k\cdot x_1^{\,2}=\frac{1}{2}2k\cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\left|V_K\right|=\sqrt{\frac{k(A^2-x_1^{\,2})}{m_1}}=\sqrt{\frac{100\frac{N}{m}\left((0.06m)^2-(0,03m)^2\right)}{1kg}} \Rightarrow \left|V_K\right|=0,3\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Κατά την κρούση, η ορμή του συστήματος Σ_1, Σ_2 διατηρείται στον άξονα που είναι παράλληλος στο πλάγιο επίπεδο. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της ορμής στον άξονα αυτόν έχουμε:



λίγο πριν την κρούση — αμέσως μετά την κρούση

$$P_{\alpha\rho\chi,\,x}=P_{\tau\varepsilon\lambda,\,x} \Rightarrow m_2\upsilon_0\cdot\eta\mu\varphi=(m_1+m_2)V_K \Rightarrow$$

$$\upsilon_0=\frac{(m_1+m_2)V_K}{m_2\eta\mu\varphi}=\frac{2m_1V_K}{m_1\eta\mu\varphi}=\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Δ3. Η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης που απέχει *A=0,06m* από τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος, συμπίπτει με τη θέση στην οποία τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή θα βρεθεί από την εξίσωση της απομάκρυνσης, αν αντικαταστήσουμε *x=+A*.

$$A=A\cdot\eta\mu\left(\omega t+\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(\omega t+\frac{5\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Η πρώτη φορά, βρίσκεται για *k=1*, καθώς είναι η μικρότερη τιμή του k για την οποία παίρνουμε θετική χρονική στιγμή, οπότε παίρνουμε:

$$\omega t+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi \Rightarrow \quad t=\frac{10\pi}{6\omega}$$

Όμως, $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{2k}{2m_1}} \Rightarrow \omega=10\frac{rad}{s}$,

οπότε με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$t=\frac{\pi}{6}s$$

Δ4. Όταν το συσσωμάτωμα περνά από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά, έχει ταχύτητα μέτρου υ_{max}

$$\upsilon_{max} = \omega A = 10\frac{rad}{s} \cdot 0{,}06m \Rightarrow \upsilon_{max} = 0{,}6\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Στη θέση αυτή η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο συσσωμάτωμα είναι μηδέν.

i. Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας κάθε ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{F_{\varepsilon\lambda}dx}{dt} \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda} \cdot \upsilon$$

Τα διανύσματα των $F_{\varepsilon\lambda}$ και της ταχύτητας. έχουν αντίθετες φορές επειδή το συσσωμάτωμα κατεβαίνει και κάθε $F_{\varepsilon\lambda}$ έχει φορά προς τα πάνω. Αντικαθιστώντας τις τιμές περιμένουμε οι δύο ρυθμοί να είναι ίδιοι καθώς τα ελατήρια έχουν ίδιες παραμορφώσεις.

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -100\frac{N}{m} \cdot 0{,}06m \cdot \left(-0{,}6\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = +3{,}6\frac{J}{s}$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -\frac{(m_1+m_2)g\,\eta\mu\varphi \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -(m_1+m_2)g\,\eta\mu\varphi \cdot \upsilon \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\left(-2kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}6\right) \cdot \left(-0{,}6\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -7{,}2\frac{J}{s}$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Πετρίδης Παναγιώτης** και **Ποντικός Ηλίας, Φυσικοί.**
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.**