ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

6° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5) - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (δ) Α1β. (α)

Α2α. (β) Α2β. (δ)

Α3α. (γ) Α3β. (δ)

Α4α. (β) Α4β. (γ)

Α5. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή είναι η (γ).

Τα σφαιρίδια έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου, άρα για να συγκρουσθούν πρέπει να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Δεχόμενοι ότι το σφαιρίδιο $Σ_1$ κινείται προς τα θετικά, για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων θα ισχύουν: $\upsilon_2' = 0$, $\upsilon_1 = \upsilon_0$ και $\upsilon_2 = -\upsilon_0$.
Από τους τύπους για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά από μια ελαστική κεντρική κρούση, έχουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow 0 = \frac{(m_2 - m_1)(-\upsilon_0) + 2m_1\upsilon_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

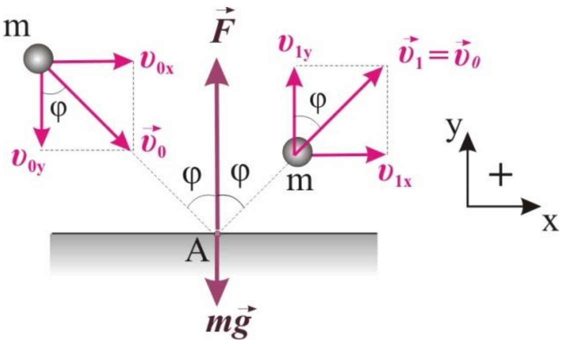
$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - 3m_1)\upsilon_0 + 2(3m_1)(-\upsilon_0)}{m_1 + 3m_1} \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{-2m_1\upsilon_0 - 6m_1\upsilon_0}{m_1 + 3m_1} \Rightarrow \upsilon_1' = -2\upsilon_0$$

Εναλλακτικά

Στις κεντρικές ελαστικές κρούσεις ισχύει: $\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$.

Όμως $\upsilon_2' = 0$, $\upsilon_1 = \upsilon_0$ και $\upsilon_2 = -\upsilon_0$,οπότε $\upsilon_1' = -2\upsilon_0$.

Β2. Σωστή επιλογή είναι η (β). Η κρούση του σφαιριδίου με το δάπεδο είναι ελαστική, επομένως η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης και οι ταχύτητες του σφαιριδίου πριν και μετά την κρούση έχουν το ίδιο μέτρο υ_0. Αναλύουμε την αρχική ταχύτητα σε δύο κάθετες συνιστώσες.



Η μείωση της απόστασης σφαιριδίου-δαπέδου (και η κρούση) οφείλεται μόνο στη συνιστώσα υ_y. Άρα, το σφαιρίδιο δέχεται δύναμη μόνον στον κατακόρυφο άξονα. Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει αναλλοίωτη.

Από το 2ο νόμο του Newton για τον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{\vec{p}_y^{\,'}-\vec{p}_y}{\Delta t} \quad \acute{\eta} \quad F-mg=\frac{m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi-(-m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi)}{\Delta t}\Rightarrow F=mg+\frac{2m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi}{\Delta t}$$

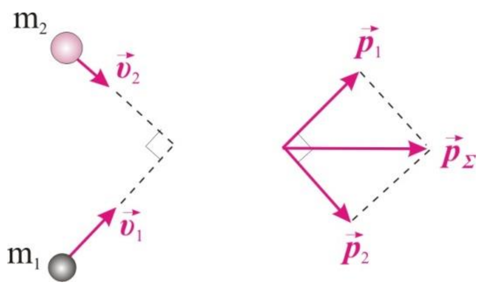
Β3. Σωστή επιλογή είναι η (α).

Στην κεντρική πλαστική κρούση το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο. Άρα, τα σφαιρίδια πριν την κρούση έχουν αντίθετες ορμές, $\vec{p}_2=-\vec{p}_1$ και όλη η μηχανική ενέργεια χάνεται μετατρεπόμενη σε θερμότητα.

$$\vec{p}_2=-\vec{p}_1 \quad \acute{\eta} \quad m_2\upsilon_2=m_1\upsilon_1\xrightarrow{m_1=2m_2}\upsilon_2=2\upsilon_1$$

$$E_1=Q_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\Rightarrow E_1=\frac{1}{2}2m_2\left(\frac{\upsilon_2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\Rightarrow E_1=\frac{3}{4}m_2\upsilon_2^2$$

Στην πλάγια κρούση οι αρχικές ορμές των σωμάτων είναι σε κάθετες διευθύνσεις και η ορμή του συσσωματώματος, από την ΑΔΟ, είναι: $\vec{p}_\Sigma=\vec{p}_1+\vec{p}_2$.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$$\left((m_1+m_2)V_\kappa\right)^2=\left(2m_2\frac{\upsilon_2}{2}\right)^2+(m_2\upsilon_2)^2\Rightarrow$$

$$V_\kappa^2=\frac{(m_2\upsilon_2)^2+(m_2\upsilon_2)^2}{(3m_2)^2}\Rightarrow V_\kappa^2=\frac{2}{9}\upsilon_2^2$$

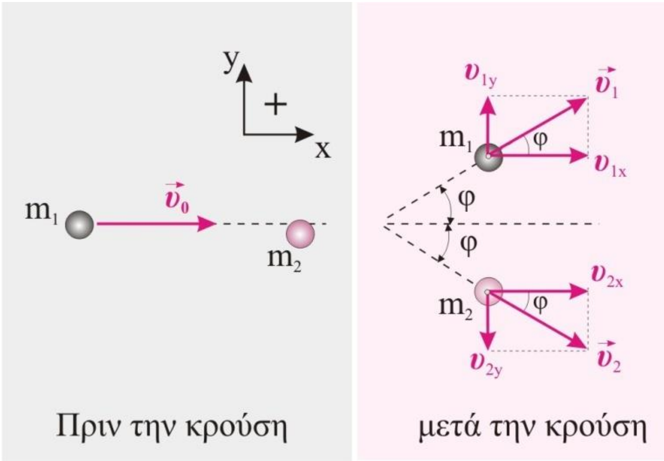
Οπότε η απώλεια μηχανικής ενέργειας στη δεύτερη περίπτωση είναι:

$$E_2=Q_2=K_{\alpha\rho\chi}-K_{\tau\varepsilon\lambda}=E_1-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_\kappa^2\Rightarrow E_2=\frac{3}{4}m_2\upsilon_2^2-\frac{1}{2}3m_2\cdot\frac{2}{9}\upsilon_2^2\Rightarrow E_2=\frac{15}{36}m_2\upsilon_2^2$$

Άρα, ο ζητούμενος λόγος των απωλειών είναι:

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\frac{15}{36}m_2\upsilon_2^2}{\frac{3}{4}m_2\upsilon_2^2}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=\frac{5}{9}$$

Β4. Σωστή επιλογή είναι η (γ).



Αναλύουμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση σε οριζόντιο και κάθετο άξονα. Αν υ_1 και υ_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αντίστοιχα μετά την κρούση, για τις ορμές των σωμάτων στους επιμέρους άξονες έχουμε:

$p_{1y}=m_1\upsilon_{1y}=m_1\upsilon_1\eta\mu\varphi$,

$p_{2y}=m_2\upsilon_{2y}=-m_2\upsilon_2\eta\mu\varphi$,

$p_{1x}=m_1\upsilon_{1x}=m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi$ και

$p_{2x}=m_2\upsilon_{2x}=m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ σε κάθε άξονα ξεχωριστά:

Άξονας y: $0=p_{1y}+p_{2y}\Rightarrow m_1\upsilon_1\cdot\eta\mu\varphi=m_2\upsilon_2\cdot\eta\mu\phi\Rightarrow m_1\upsilon_1=m_2\upsilon_2$ (1)

Άξοναςx: $p_{10}=p_{1x}+p_{2x}\Rightarrow m_1\upsilon_0=m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\phi+m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\phi\xrightarrow{(1)}$ (2)

$m_1\upsilon_0=2m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu30°\Rightarrow\upsilon_0=\upsilon_1\sqrt{3}$

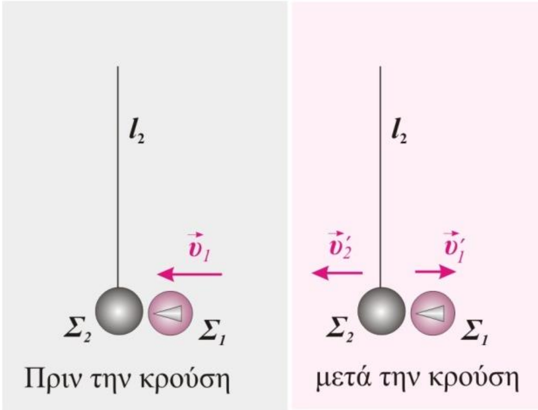
Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων δίνει:

$$K_1=K_1'+K_2'\Rightarrow\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\xrightarrow{(1)}m_1\upsilon_0^2=m_1\upsilon_1^2+\frac{m_1^2\upsilon_1^2}{m_2}=m_1\upsilon_1^2\cdot\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\Rightarrow$$

$$\upsilon_0^2=\upsilon_1^2\cdot\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\xrightarrow{(2)}3\upsilon_1^2=\upsilon_1^2\cdot\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=2$$

Θέμα Γ

Γ1. Η κρούση του συσσωματώματος Σ$_1$ με τη σφαίρα Σ$_2$ είναι κεντρική και ελαστική με το Σ$_2$να είναι αρχικά ακίνητο. Επομένως, από τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε:



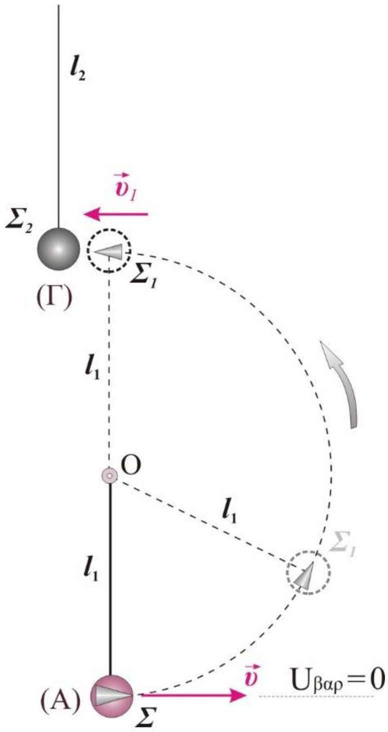
σχήμα (α)

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow (m_1 + m_2)\upsilon_1' = (m_1 - m_2)\upsilon_1 \Rightarrow$$

$$m_2 = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_1'}{\upsilon_1 + \upsilon_1'} m_1 \Rightarrow$$

$$m_2 = \frac{(6\, m/s) - (-2\, m/s)}{(6\, m/s) + (-2\, m/s)} \cdot 0{,}1\, kgm \Rightarrow \; m_2 = 0{,}2\, kg$$

Γ2. Κατά την κίνηση του συσσωματώματος Σ$_1$ από το χαμηλότερο σημείο μέχρι το ψηλότερο σημείο της κυκλικής του τροχιάς, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Αν με υ συμβολίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του Σ$_1$ στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του, εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στις θέσεις (Α) , (Γ) έχουμε:



σχήμα (β)

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + m_1 g\cdot(2l_1) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + 4g\ell_1} =$$

$$\sqrt{(6\, m/s)^2 + 4\cdot(10\, m/s^2)\cdot(0{,}7\, m)} \Rightarrow \upsilon = 8\, m/s$$

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση του βλήματος με το σώμα Σ έχουμε:

$$m_\beta\upsilon_\beta = m_1\upsilon \Rightarrow \upsilon_\beta = \frac{m_1\upsilon}{m_\beta} = \frac{(0{,}1\, kg)}{(0{,}005\, kg)}(8\, m/s) \Rightarrow \upsilon_\beta = 160\, m/s$$

Γ3. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα Σ$_2$ είναι:

$$\pi\% = \frac{K_2'}{K_\beta}100\% \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του βλήματος ισούται με:

$$K_\beta = \frac{1}{2} m_\beta \upsilon_\beta^2 = \frac{1}{2}(0{,}005\,kg)\cdot(160\,m/s)^2 = 64\,J\,.$$

Η σφαίρα $Σ_2$ αμέσως μετά την ελαστική κρούση της με το συσσωμάτωμα $Σ_1$ κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2'$ μέτρου:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2\cdot(0{,}1\,kg)}{(0{,}1\,kg)+(0{,}2\,kg)}\cdot(6\,m/s) \Rightarrow \upsilon_2' = 4\,m/s$$

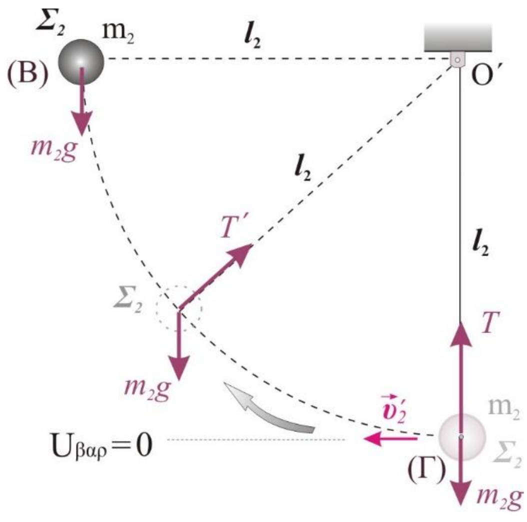
και έχει κινητική ενέργεια: $K_2' = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}\cdot(0{,}2\,kg)\cdot(4\,m/s)^2 \Rightarrow K_2' = 1{,}6\,J$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$$\pi\% = \frac{K_2'}{K_\beta}100\% = \frac{1{,}6J}{64J}100\% \Rightarrow \pi\% = 2{,}5\%\,.$$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Επομένως, σύμφωνα με την εκφώνηση, όταν το σκοινί είναι οριζόντιο η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα $Σ_2$ είναι το βάρος της.

Καθώς η σφαίρα $Σ_2$ κινείται σε κυκλική τροχιά από το κατώτερο σημείο Γ προς το σημείο Β δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος και την τάση του νήματος. Το σκοινί είναι τεντωμένο και η τάση του νήματος είναι απαραίτητη για την ύπαρξη κεντρομόλου δύναμης.



σχήμα (γ)

Για την οριζόντια θέση Β, η συνθήκη της κυκλικής κίνησης μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\Sigma F = F_\kappa \Rightarrow T_\nu = \frac{m_2\upsilon_B'^2}{l_2}\,.$$

Όμως, αφού στη θέση Β η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι ίση με το βάρος του, η τάση του νήματος είναι μηδέν, οπότε η σφαίρα στη θέση Β είναι στιγμιαία ακίνητη.

Κατά την κίνησή της σφαίρας $Σ_2$ από τη θέση Γ έως τη θέση Β διατηρείται η μηχανική ενέργεια, οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 = m_2 g l_2 \Rightarrow l_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} = \frac{(4\,m/s)^2}{2\cdot(10\,m/s^2)} \Rightarrow l_2 = 0{,}8\,m$$

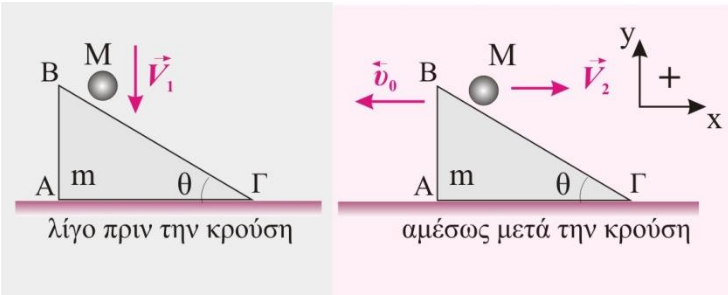
Θέμα Δ

Δ1. Καθώς η σφήνα κινείται πάνω στο τραχύ κομμάτι της οριζόντιας επιφάνειας, επιβραδύνεται ομαλά εξ αιτίας της δύναμης της τριβής ολίσθησης $\vec{T}$, η οποία έχει μέτρο $T = \mu N = \mu mg = 1\,N$. Το σώμα αποκτά επιτάχυνση $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{-1N}{0,5kg} \Rightarrow a = -2\,m/s^2$ και το διάστημα που διανύει υπολογίζεται από τη σχέση $d = |\upsilon_0| \cdot \Delta t_2 - \dfrac{1}{2}|a| \cdot (\Delta t_2)^2$

Λύνοντας ως προς $|\upsilon_0|$ παίρνουμε:

$$|\upsilon_0| = \frac{d + \frac{1}{2}|a| \cdot (\Delta t_2)^2}{\Delta t_2} = \frac{3m + \frac{1}{2}(2m/s^2) \cdot (1s)^2}{(1s)} \Rightarrow |\upsilon_0| = 4\,m/s$$

Δ2. Στο σύστημα σφήνα - σφαίρα οι εξωτερικές δυνάμεις βρίσκονται όλες στην κατακόρυφη διεύθυνση. Στην οριζόντια διεύθυνση δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, οπότε η ορμή του συστήματος στην οριζόντια διεύθυνση διατηρείται:



$$P_{\alpha\rho\chi,x} = P_{\tau\varepsilon\lambda,x} \Rightarrow 0 = m\upsilon_0 + MV_2 \Rightarrow V_2 = \frac{-m\upsilon_0}{M} = \frac{-(0,5\,kg)\cdot(-4\,m/s)}{1\,kg} \Rightarrow V_2 = 2\,m/s$$

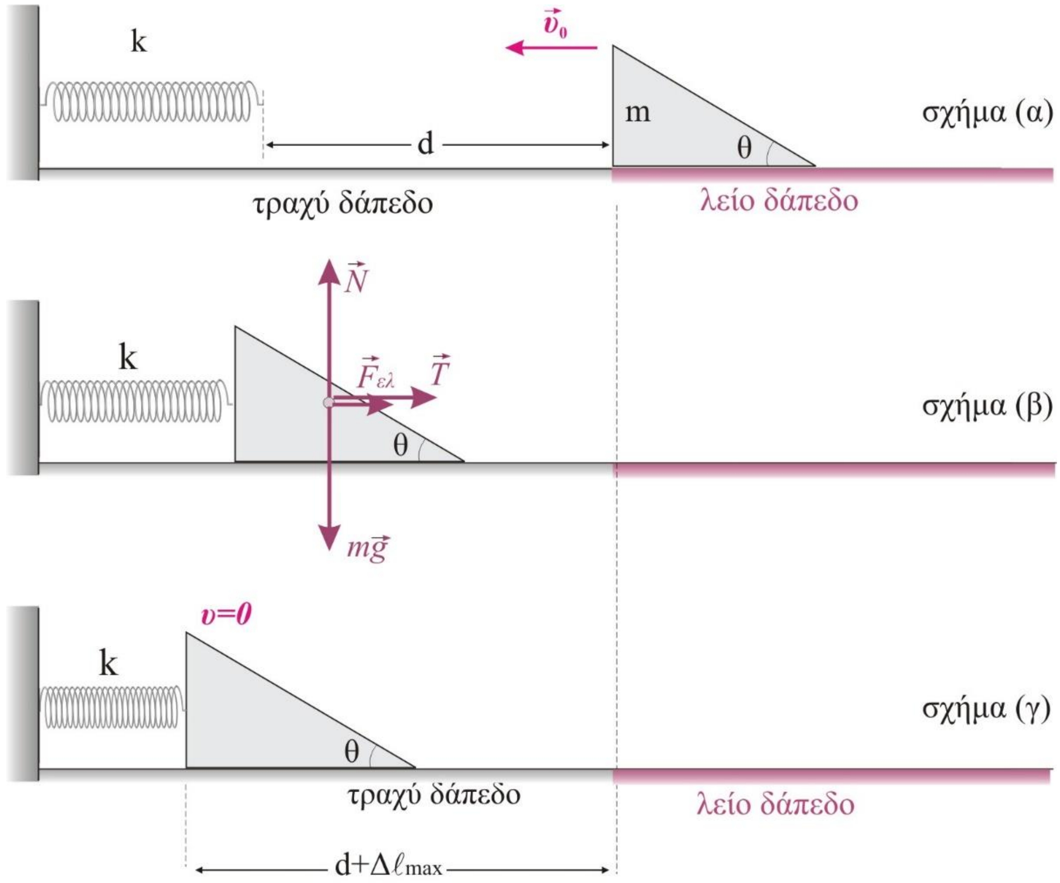
Η κρούση είναι ελαστική, οπότε η κινητική ενέργεια του συστήματος ελάχιστα πριν την κρούση θα ισούται με την κινητική ενέργεια αμέσως μετά:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}(1\,kg)\cdot(2\,m/s)^2 + \frac{1}{2}(0,5\,m/s)\cdot(4\,m/s)^2 \Rightarrow K_{\pi\rho\iota\nu} = 6\,J$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ για την ελεύθερη πτώση της σφαίρας έχουμε:

$$Mgh = K_{\pi\rho\iota\nu} \Rightarrow h = \frac{K_{\pi\rho\iota\nu}}{Mg} = \frac{6\,J}{1kg \cdot (10m/s^2)} \Rightarrow h = 0,6\,m.$$

Δ3.



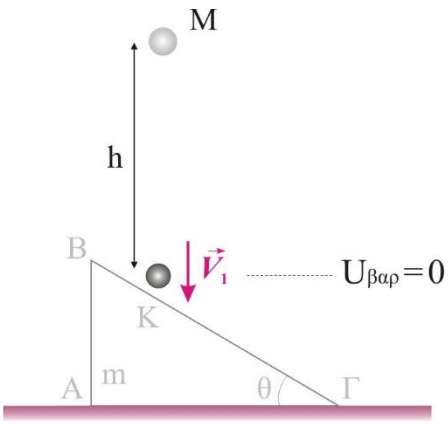
Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση της σφήνας από την αρχή της κίνησής της μέχρι τη θέση που αυτή σταματά στιγμιαία και το ελατήριο βρίσκεται σε κατάσταση μέγιστης συσπείρωσης:

$$0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=W_{T_k}+W_{F_{\varepsilon\lambda}}\Rightarrow-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=-T_k\cdot\left(d+\Delta l_{\max}\right)-\frac{1}{2}k\Delta l_{\max}^2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(0{,}5)(4)^2=(1)\cdot(3+\Delta l_{\max})+\frac{1}{2}(40)\cdot\Delta l_{\max}^2\ \ (SI)\Rightarrow$$

$$20\cdot\Delta l_{\max}^2+\Delta l_{\max}-1=0\quad(SI)\Rightarrow\Delta l_{\max}=\frac{-1+\sqrt{81}}{40}=\frac{-1+9}{40}\Rightarrow\Delta l_{\max}=0{,}2\ m$$

Δ4. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα της σφαίρας $\vec{V}_1$ ελάχιστα πριν την κρούση της με την σφήνα.



σχήμα (β)

Ε$_{μηχ}$(αρχ)=Ε$_{μηχ}$(τελ) ή $Mgh=\frac{1}{2}MV_1^2 \Rightarrow$

$$V_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot(10\,m/s^2)\cdot(0,6\,m)} \Rightarrow V_1=2\sqrt{3}\,m/s$$

με την αντίστοιχη ορμή $\vec{p}_1$ να έχει μέτρο

$p_1=MV_1=2\sqrt{3}\,kg\cdot m/s$.

Η σφαίρα μεταβάλει την ορμή της και στους δύο άξονες.

Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton για κάθε άξονα παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x=\frac{\Delta\vec{p}_x}{\Delta t_1} \text{ ή } \Sigma Fx=\frac{MV_2'-0}{\Delta t_1} \Rightarrow \Sigma F_x=\frac{1kg\cdot(2m/s)}{0,01s} \Rightarrow \Sigma F_x=200N$$

$$\Sigma\vec{F}_y=\frac{\Delta\vec{p}_y}{\Delta t_1} \; ή \; \Sigma F_y=\frac{0-MV_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \frac{-1kg\cdot\left(-2\sqrt{3}m/s\right)}{0,01s} \Rightarrow \Sigma F_y=200\sqrt{3}N$$

$$\Sigma F=\sqrt{\Sigma F_x^{\,2}+\Sigma F_y^{\,2}}=\sqrt{(200N)^2+\left(200\sqrt{3}N\right)^2} \Rightarrow \Sigma F=400N$$

Εναλλακτικά

Η ταχύτητά της σφαίρας $\vec{V}_1$ ελάχιστα πριν την κρούση της με τη σφήνα έχει μέτρο:

$V_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot(10\,m/s^2)\cdot(0,6\,m)} \Rightarrow V_1=2\sqrt{3}\,m/s$ με την αντίστοιχη ορμή $\vec{p}_1$ να έχει μέτρο $p_1=MV_1=2\sqrt{3}\,kg\cdot m/s$.

Αμέσως μετά την κρούση, η ορμή της σφαίρας $\vec{p}_2$ έχει μέτρο $p_2=MV_2=2\,kgm/s$.

Από το 2^ο νόμο του Newton για την κρούση της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t_1} \Rightarrow \left|\Sigma\vec{F}\right|=\frac{\left|\Delta\vec{p}\right|}{\Delta t_1} \text{ με } \quad (2)$$

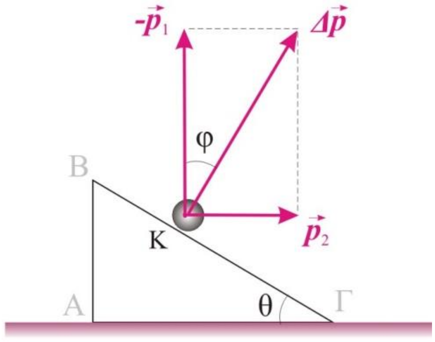
$$\Delta\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\vec{p}_2+(-\vec{p}_1)$$

Το μέτρο του $\Delta\vec{p}$ βρίσκεται από το πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \sqrt{\left|\vec{p}_2\right|^2 + \left|\vec{p}_1\right|^2} = 4\,kg \cdot m/s$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$\Rightarrow \left|\Sigma\vec{F}\right| = \frac{4\,kg \cdot m/s}{0{,}01\,s} = 400\ N$$



σχήμα (γ)

Δ5. Θα προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της $\Sigma\vec{F}$.

$$\eta\mu\phi = \frac{\Sigma F_x}{\Sigma F} = \frac{200N}{400N} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 30°$$

Άρα, η διεύθυνση της $\Sigma\vec{F}$ σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο.

Όμως, η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι η δύναμη από τη σφήνα, $\vec{F}$, που είναι κάθετη στην έδρα της ΒΓ.

Οι γωνίες φ και θ έχουν τις πλευρές τους κάθετες, άρα είναι ίσες και η γωνία της σφήνας είναι θ=φ=30°.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Βουμβάκης Γεώργιος, Τσάδαρης Αθανάσιος, Χατζηθεοδωρίδης Στέλιος, Φυσικοί.**
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.**