Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Ταλαντώσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Κυριακή 18 Οκτώβρη 2020

** **Δεν έχουν γίνει τα σχήματα** εξαιτίας έλλειψης χρόνου, είναι προφανές ότι μια ολοκληρωμένη λύση τα περιλαμβάνει και είναι και αναγκαία για την κατανόηση της άσκησης.

Θέμα Α

Α.1. Σε ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας :

(δ) καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης.

Α.2. Στις φθίνουσες ταλαντώσεις στις οποίες η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας, τα φυσικά μεγέθη που έχουν πάντα την ίδια φορά είναι :

(δ) η συνισταμένη δύναμη και η επιτάχυνση.

Α.3. Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση των απλών αρμονικών ταλαντώσεων: $x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t)$ και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \pi/3)$. Οι δύο ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση. Η ταλάντωση που εκτελεί το σώμα:

(δ) είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

Α.4. Ένα σώμα είναι αναρτημένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου και εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους με την επίδραση μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης F συχνότητας f. Αν τετραπλασιάσουμε την μάζα του σώματος, χωρίς να μεταβάλλουμε την F τότε:

(γ) Θα μεταβληθεί το πλάτος και θα παραμείνει σταθερή η συχνότητα ταλάντωσης του.

Α.5.

(α) Σε ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί για να μετατραπεί η κινητική ενέργεια εξ ολοκλήρου σε δυναμική ενέργεια ισούται με T/2. **Λάθος**

(β) Όταν αυξάνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό.**Λάθος**

(γ) Αν ένα σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στο οποίο ενεργεί δύναμη απόσβεσης της μορφής $F = -b \cdot v$ τότε η αύξηση της σταθεράς απόσβεσης b προκαλεί μικρή μείωση της περιόδου της ταλάντωσης. **Λάθος**

(δ) Περίοδος του διακροτήματος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της απομάκρυνσης.**Λάθος**

(ε) Η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχει φορά πάντα προς τη θέση ισορροπίας του σώματος. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad x_2 = A\sqrt{3}\eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Αν το σώμα εκτελούσε μόνο την ταλάντωση $x_1 = f(t)$ θα είχε ενέργεια E. Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι ίση με:

(γ) $4E$

Οι δύο ταλαντώσεις έχουν διαφοράς φάσης $\phi = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2}$. *Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης που θα έχει πλάτος Α′ θα είναι:*

$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}D\left(\sqrt{A^2 + (A\sqrt{3})^2 + 2AA\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2})}\right)^2$$
$$\Rightarrow E' = \frac{1}{2}D4A^2 = 4\frac{1}{2}DA^2 = 4E$$

Β.2. Στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k είναι αναρτημένο σώμα μάζας m και κάτω από αυτό είναι συνδεδεμένο μέσο νήματος δεύτερο σώμα μάζας $3m$. Το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί και κάποια χρονική στιγμή κόβω το νήμα. Το σώμα που είναι αναρτημένο στο ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας κατά την κίνηση του θα είναι ίσο με:

(β) $3g$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Αρχικά με τα δύο σώματα αναρτημένα το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά $\Delta\ell_o$.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_o = 4mg \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{4mg}{k}$$

Όταν κοπεί το νήμα το σώμα που μένει στο ελατήριο θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την ΘΙΤ του στην οποία το ελατήριο θα έχει επιμήκυνση ίση με $\Delta\ell_o$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_o = mg \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{mg}{k}$$

Η αρχική θέση είναι και ακραία θέση για την ταλάντωση, αφού η ταχύτητα την στιγμή που κόβεται το νήμα θα είναι μηδέν. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta\ell_o' - \Delta\ell_o = \frac{3mg}{k}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας θα είναι μέγιστος στις ακραίες θέσεις, άρα το μέτρο της μέγιστης τιμής του θα είναι:

$$\mid \frac{dv}{dt} \mid = \omega^2 A = \frac{k}{m}\frac{3mg}{k} = 3g$$

* *όπου βέβαια* $\kappa = m\omega^2$

Β.3. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ανεξάρτητες απλές αρμονικές ταλαντώσεις παραπλήσιων γωνιακών συχνοτήτων. Αν ο χρόνος μεταξύ τριών διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της ταλάντωσης είναι $4s$ και το σώμα κατά την διάρκεια 2 διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους διέρχεται από την θέση ισορροπίας του 200 φορές τότε οι συχνότητες των ανεξάρτητων ταλαντώσεων είναι

(α) $f_1 = 50.25Hz$ και $f_2 = 49.75Hz$

Ο χρόνος των τριών διαδοχικών μηδενισμών είναι:

$$2T_\delta = 4 \Rightarrow \frac{1}{f_1 - f_2} = 2 \Rightarrow f_1 - f_2 = 0,5$$

Κατά την διάρκεια μιας ταλάντωσης το σώμα διέρχεται από την ΘΙΤ 2 φορές και σε διάρκεια μιας περίοδου διακροτήματος το πλάτος μηδενίζεται 2 φορές, άρα:

$$200 \cdot \frac{T}{2} = T_\delta \Rightarrow 100 \cdot \frac{2}{f_1 + f_2} = 2 \Rightarrow f_1 + f_2 = 100$$

** *όπου βέβαια για την περίοδο της ταλάντωσης έχουμε* $T = \frac{1}{f} = \frac{2}{f_1+f_2}$

Από τις παραπάνω 2 σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των συχνοτήτων

Θέμα Γ

Ένα σώμα μάζας m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της ταχύτητας του είναι $0,05\pi s$ και το διάστημα που διανύει το σώμα στον ίδιο χρόνο είναι $40cm$.

Την χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t_o = 0$ το σώμα διέρχεται από θέση $x_1 > 0$ στην οποία η Κινητική Ενέργεια του είναι ίση με τα $\frac{3}{4}$ της μέγιστης τιμής της και η δυναμική ενέργεια αυξάνεται.

Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της ταχύτητας είναι $\Delta t = \frac{T}{2} = 0,05\pi \Rightarrow T = 0,1\pi s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 20rad/s$ *και σε αυτό το χρόνο το σώμα έχει πάει από την μία στην άλλη ακραία θέση είναι* $2A = 40cm \Rightarrow A = 0,2m$

Γ.1 Να υπολογίσετε την μάζα του σώματος και την απομάκρυνση x_1.

$$D = \kappa = m_1\omega^2 \Rightarrow m_1 = 0,25kg$$

$$E = K + U \Rightarrow E - \frac{3}{4}E = U \Rightarrow \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x_1 = \frac{A}{2} = 0,1m$$

Γ.2 Να γράψετε την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα κατά την κίνηση του, σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Γνωρίζουμε ότι:

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right) \qquad \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_o\right)$$

Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ *το σώμα βρίσκεται στην θέση* $x_1 = 0,1m$ *και αφού η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται θα κινείται προς την ακραία θέση, άρα η ταχύτητα του θα είναι θετική. Άρα:*

$$0,2\eta\mu\phi_o = 0,1 \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{1}{2} \qquad \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\phi_o > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0$$

Οπότε η αρχική φάση θα είναι: $\phi_o = \dfrac{\pi}{6}$

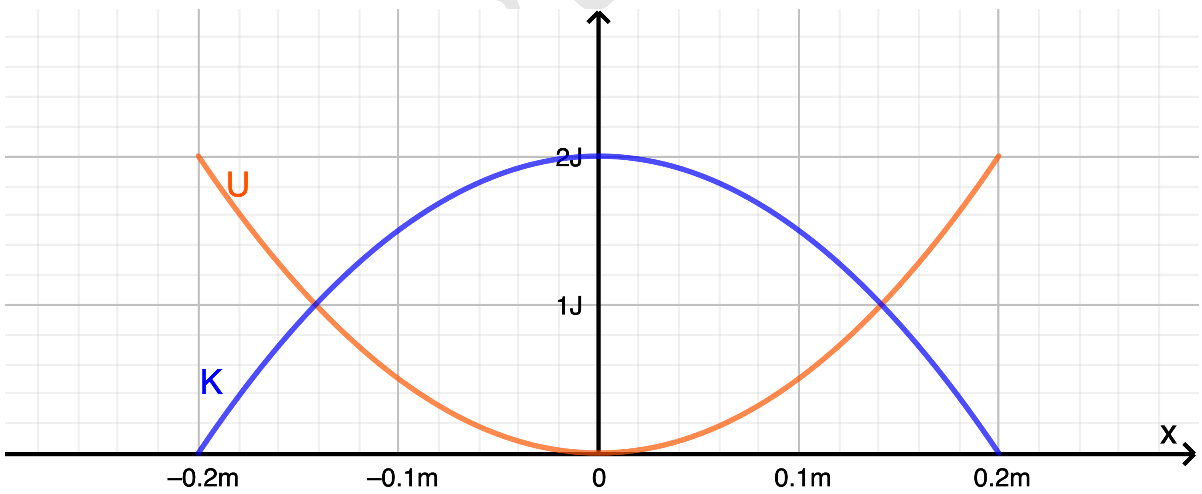
Για την δύναμη θα ισχύει:

$$\Sigma F = -Dx = -20\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Γ.3 Να γράψετε την εξίσωση της Κινητικής Ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και να κάνετε το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U = 50x^2 \quad -0,2 \leq x \leq 0,2 \quad (S.I)$$

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = K + U \Rightarrow K = 2 - 50x^2 \quad -0,2 \leq x \leq 0,2 \quad (S.I)$$



Κάποια στιγμή t_1 που το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για 2η φορά, σφηνώνεται ακαριαία σε αυτό βλήμα μάζας $m_2 = 0,25kg$, το οποίο κινείται οριζόντια με την διεύθυνση της ταχύτητας του να ταυτίζεται με τον άξονα του ελατηρίου. Η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος που θα προκύψει είναι ίση με $11J$.

Γ.4 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1.

Ακινητοποιείται για 2η φορά όταν φτάνει στην ακραία αρνητική θέση 1η φορά.

$$-A = A\eta\mu\left(20t_1 + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(20t_1 + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow 20t_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

Άρα $t_1 = \dfrac{\pi}{15}s$

Γ.5 Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος καθώς και της ταχύτητας του βλήματος πριν την κρούση.

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης Ορμής για το σύστημα σώμα - βλήμα:

$$0 + m_2 v_o = (m_1 + m_2)V$$

η Θέση του συσσωματώματος που θα προκύψει μετά την κρούση θα είναι τυχαία θέση στην οποία η απομάκρυνση από την ΘΙΤ θα είναι $x' = A = 0,2m$ *και η ταχύτητα θα είναι* V. *Άρα από την ΑΔΕΤ σε αυτή την θέση έχουμε:*

$$E' = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = 11 \Rightarrow V = 6m/s$$

Από την ΑΔΟ θα προκύψει ότι $v_o = 12m/s$

Θέμα Δ

Σώματα Σ_2 και Σ_3 με μάζες $m_2 = m_3$ ισορροπούν σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^o$. Τα σώματα είναι δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k με το σώμα Σ_3 να βρίσκεται σε επαφή με τον τοίχο ο οποίος είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο. Σε απόσταση $S = 2,5m$ από το σώμα Σ_2, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου αφήνεται σώμα Σ_1 το οποίο ολισθαίνει και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2. Κατά την κρούση το σώμα Σ_1 χάνει το 64% της αρχικής κινητικής του ενέργειας πρίν την κρούση και αμέσως μετά κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική.

Δ.1 Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 πρίν και αμέσως μετά την κρούση.

Για την κάθοδο του Σώματος 1 εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του πριν την κρούση με το Σώμα 2

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 g\eta\mu\phi S \Rightarrow \upsilon_1 = 5m/s$$

Αφού χάνει το 64% της κινητικής του ενέργειας εξαιτίας της κρούσης θα προκύπτει ότι η ταχύτητα του μετά θα είναι:

$$K_1' = 0,36K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = 0,36\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1' = 0,6\upsilon_1 = 3m/s$$

Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και το σώμα 1 μετά κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση θα έχουμε:

$$\upsilon_1' = -0,6\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow m_2 = 4m_1$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 2m/s$$

Η μάζα του σώματος Σ_1 είναι $m_1 = 0.05kg$ και το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση αρχίζει να εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με μέγιστο ρυθμό μεταβολής της ορμής $4kg \cdot m/s^2$. Αν $t = 0$ η στιγμή της κρούσης και θετική φορά προς τα κάτω τότε:

Δ.2 Να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου k και το πλάτος της ταλάντωσης.

Η ταχύτητα που αποκτά το Σώμα 2 εξαιτίας της κρούσης θα είναι και η μέγιστη ταχύτητα για την ταλάντωση του αφού βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του.

$$\frac{dP}{dt} = -\kappa x \Rightarrow 4 = \kappa A \quad (1)$$

$$k = m_2\omega^2 \Rightarrow \kappa = 0,2\omega^2 \quad (2)$$

$$\upsilon_2' = 2 = \omega A \quad (3)$$

Από (1) , (2), (3) προκύπτει ότι: $A = 0,2m$ *και* $\kappa = 20N/m$

Δ.3 Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ3 από τον τοίχο συναρτήσει του χρόνου.

Η απομάκρυνση από την ΘΙΤ για το σώμα 1 κατά την ταλάντωση του θα είναι:

$$x = 0,2\eta\mu(10t) \quad (SI)$$

*** Δεν υπάρχει αρχική φάση αφού το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ και έχει θετική ταχύτητα την* $t_o = 0$

Στον άξονα της ταλάντωσης του το σώμα 2 δέχεται την δύναμη από το ελατήριο και την οριζόντια συνιστώσα του βάρους του.

$$\vec{w_{2x}} + \vec{F_{\varepsilon\lambda}} = \Sigma\vec{F} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -m_2 g\eta\mu\phi - Dx$$

Το Σώμα 3 ισορροπεί με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου ($F_{\varepsilon\lambda} = -F'_{\varepsilon\lambda}$)*, του βάρους του και των καθέτων δυνάμεων από το δάπεδο και τον τοίχο.*

$$\Sigma\vec{F_x} = \vec{w_{3x}} + \vec{F'_{\varepsilon\lambda}} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow N = -m_3 g\eta\mu\phi + F_{\varepsilon\lambda} = -2 - 20x \quad (SI)$$

**** Προσοχή στα πρόσημα όταν δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές, είναι προφανές ότι εύκολα μπορούμε να κάνουμε ένα έλεγχο την ορθότητα της σχέσης μας υπολογίζοντας την δύναμη για κάποιες χαρακτηριστικές θέσεις.**

Δ.4 Να εξετάσετε αν το σώμα Σ_3 θα χάσει την επαφή του με τον τοίχο και αν ναι ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό.

Για να χάσει επαφή το Σώμα 3 με τον τοίχο πρέπει το μέτρο της δύναμης από αυτόν να μηδενιστεί.

$$| N |= 0 \Rightarrow -2 - 20x = 0 \Rightarrow x = -0,1m$$

*** Το αποτέλεσμα είναι λογικό ως προς το πρόσημο, γιατί η δύναμη του ελατηρίου πάνω στο Σώμα 3 πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω, ώστε να ¨τραβήξει¨ το σώμα προς τα πάνω και να χαθεί η επαφή με τον τοίχο. Για να έχει αυτή την φορά το σώμα 2 πρέπει να βρίσκεται πάνω από την θέση φυσικού μήκους, άρα να έχουμε αρνητική απομάκρυνση, αφού η ΘΦΜ είναι πάνω από την ΘΙΤ.*

$$-0,1 = 0,2\eta\mu(10t) \Rightarrow \eta\mu(10t) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 10t = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{7\pi}{60}s$$

*** Βέβαια να λυθεί αναλυτικά η τριγωνομετρική εξίσωση για να βρεθεί η πρώτη φορά που διέρχεται από το σημείο αυτό.*

Δ.5 Για την συγκεκριμένη χρονική στιγμή να βρεθεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Την παραπάνω χρονική στιγμή η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{60}\right) = -\sqrt{3}m/s$$

Η παραμόρφωση του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης θα είναι $\Delta\ell_o$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_o = m_2 g\eta\mu\phi \Rightarrow \Delta\ell_o = 0,05m$$

Την χρονική στιγμή που χάνει επαφή βρίσκεται πάνω από την θέση φυσικού μήκους , οπότε η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\left(\mid x \mid - \Delta\ell_o\right)^2 = 0,025 Joule$$

Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{F_{\varepsilon\lambda}dx}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}\upsilon = -k\left(\mid x \mid - \Delta\ell_o\right)\upsilon = \sqrt{3} Joule/s$$