Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κρούσεις - Αρμονική Ταλάντωση

Ενδεικτικές Λύσεις

Σάββατο 1 Αυγούστου 2020

Ομάδα Β

Θέμα Α

Α.1. Σε κεντρική ανελαστική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών

(α) ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών μετατρέπεται σε θερμότητα

Α.2. Δύο σφαίρες Α και Β κινούμενες σε αντίθετες κατευθύνσεις συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά δημιουργώντας συσσωμάτωμα που ακινητοποιείται. Αν η σφαίρα Α έχει μάζα διπλάσια από τη σφαίρα Β, τότε τα μέτρα των αρχικών ορμών τους έχουν πηλίκο

(α) 1

Α.3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνση του από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο, δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα.

(γ) Ο ρυθμος μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας είναι θετικός στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ και $t_2 \rightarrow t_3$

Α.4. Σώμα μάζας m είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α και ενέργεια Ε. Αν τριπλασιάσουμε το πλάτος ταλάντωσης του, τότε τριπλασιάζεται :

(δ) το πλάτος της επιτάχυνσης

Α.5.

(α) Όταν ένα σώμα συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με ένα δεύτερο σώμα ίδιας μάζας που κινείται, τότε τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες και ορμές. **Σωστό**

(β) Σε μάθε κρούση η ενέργεια παραμένει σταθερή. **Σωστό**

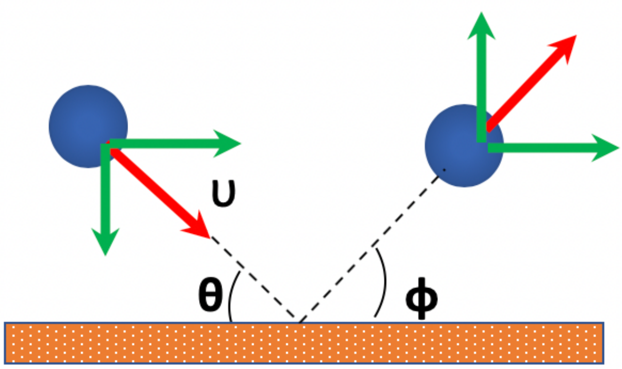
(γ) Η σταθερά επαναφοράς μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι ανάλογη της δύναμης επαναφοράς και της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας. **Λάθος**

(δ) Ένα σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο όταν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στο σώματα που το απαρτίζουν. **Λάθος**

(ε) όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η Κινητική και η δυναμική του ενέργεια μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Ένα σφαιρίδιο μάζας m προσπίπτει πλάγια σε δάπεδο με ταχύτητα μέτρου υ της οποίας η διεύθυνση σχηματίζει γωνία θ με το δάπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν σας είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες, τότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου θα είναι ίσο με:

(β) $2m\upsilon\eta\mu\theta$

Μετά την κρούση το σφαιρίδιο ανακλάται με ταχύτητα υ' με γωνία ϕ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή η κρούση είναι ελαστική:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 \Rightarrow \mid \upsilon \mid = \mid \upsilon' \mid$$

Η ορμή διατηρείται μόνο κατά τον άξονα $x'Ox$ άρα:

$$P_x = P'_x \Rightarrow m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta = m\upsilon'\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow \theta = \phi$$

Οπότε η συνολική μεταβολή της ορμής είναι εκείνη που θα προκύψει από την μεταβολή στον άξονα $y'Oy$

$$\Delta P = P'_y - P_y = -m\upsilon'\eta\mu\phi - m\upsilon\eta\mu\theta = -2m\upsilon\eta\mu\theta$$

Β.2. Μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 3m_1$. Το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταβιβάζεται εξαιτίας της κρούσης στην Σ_2 θα είναι ίσο με:

(α) 75%

Μετά την κρούση τα σώματα αποκτούν ταχύτητες υ'_1 και υ'_2 και κινητικές ενέργειες K'_1 και K'_2. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{K'_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon'^2_2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1} = 3\left(\frac{\upsilon'_2}{\upsilon_1}\right)^2 = 3\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = 0,75$$

Β.3. Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και σταθεράς επαναφοράς D. Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ ξεκινά την ταλάντωση του από θέση που η επιτάχυνση του έχει μέγιστο μέτρο και αρνητική αλγεβρική τιμή. Την χρονική στιγμή t_1 διέρχεται για πρώτη φορά από θέση που η Δυναμική ενέργεια είναι ίση με την Κινητική ενέργεια του. Το έργο της δύναμης επαναφοράς για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ θα είναι ίσο με:

(β) $\frac{1}{4}DA^2$

Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση και την χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται σε θέση x_1 για την οποία $K = U = \frac{E}{2}$ (αφού $E = K + U$). Το ζητούμενο έργο είναι:

$$W = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}DA^2$$

Θέμα Γ

Μια σημαδούρα μικρών διαστάσεων και μάζας $m = 2kg$, βρίσκεται μέσα σε μια τεχνητή λίμνη και εκτελεί με την επίδραση κατάλληλης δύναμης μια κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση. Για την ταλάντωση της σημαδούρας σας δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

- Εκτελεί 10 ταλαντώσεις κάθε 2 δευτερόλεπτα.

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{10}{2} = 5Hz \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 0,2s \Rightarrow \omega = 2\pi f = 10\pi\, rad/s$$

- Διανύει διάστημα 40 cm σε κάθε πλήρη ταλάντωση της.

$$4A = 40cm \Rightarrow A = 10cm = 0,1m$$

- Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ διέρχεται επιβραδυνόμενη από την θέση που το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ίσο με το μισό της μέγιστης τιμής της και η αλγεβρική της τιμή αρνητική.

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow -\frac{\omega^2 A}{2} = -\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

αφού επιταχύνεται η ταχύτητα θα έχει αντίθετη αλγεβρική τιμή από την επιτάχυνση, άρα θα είναι θετική. Υπολογίζω με τα παραπάνω την αρχική φάση της ταλάντωσης:

$$\frac{A}{2} = A\eta\mu\left(\omega \cdot 0 + \phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\phi_o = \frac{\pi}{6} \quad ή \quad \frac{5\pi}{6}$$

και αφού $\upsilon > 0 \Rightarrow συν\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{6} rad$

Γ.1 Να υπολογιστεί το πλάτος, η περίοδος και η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης της.

Παραπάνω έχουν υπολογιστεί το πλάτος και η περίοδος της ταλάντωσης. Η σταθερά επαναφοράς θα είναι: $D = m\omega^2 = 2000 N/m$

Γ.2 Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και της ταχύτητας της σημαδούρας.

$$x = 0,1 ημ\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \ (S.I.)$$

$$\upsilon = \pi συν\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \ (S.I.)$$

Γ.3 Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται η σημαδούρα ως συνάρτησης της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα.

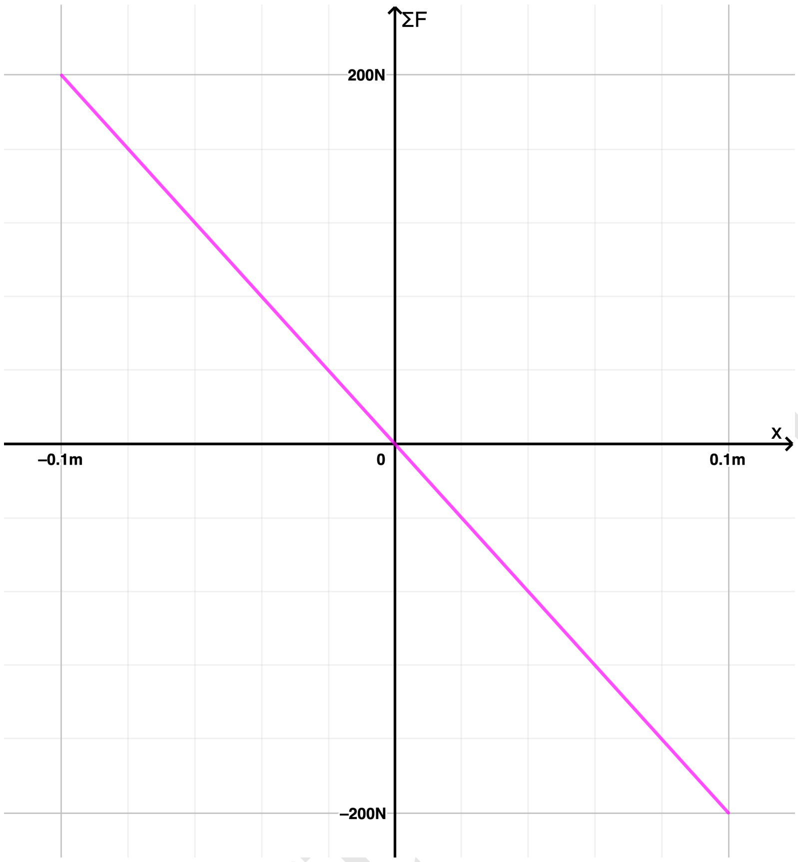
$$\Sigma F = -2000x \ \ -0,1 \le x \le 0,1 \ (S.I.)$$

Γ.4 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1 που η σημαδούρα θα περάσει για 1η φορά μετά την $t_o = 0$ από θέση που έχει την μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

Η θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας από την οποία διέρχεται για πρώτη φορά είναι η ακραία θετική θέση, άρα:

$$0,1 = 0,1 ημ\left(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 10\pi t + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30} s$$

Γ.5 Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής Ενέργειας και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής την χρονική στιγμή t_1.



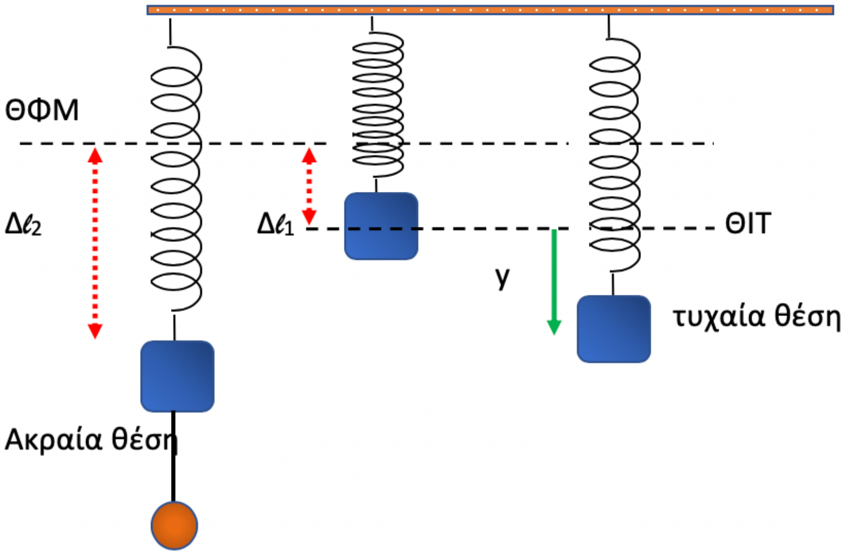
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -D \cdot x = -2000 \cdot 0,1 = -200N$$

Θέμα Δ

Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 400\pi^2 N/m$ είναι δεμένο σε οροφή, και στο άλλο άκρο του έχουμε τοποθετήσει σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 4kg$. Δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 20\pi^2 kg$ είναι δεμένο στο κάτω μέρος του σώματος μάζας m_1 και απέχει από το έδαφος ύψος $h = 1,8m$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το νήμα κόβεται και τα σώματα αρχίζουν να κινούνται.

Δ.1 Να δείξετε ότι το σώμα μάζας Σ_1 θα εκτελέσει Απλή Αρμονική Ταλάντωση και να υπολογίσετε την σταθερά επαναφοράς της.



- *Στην αρχική θέση τα δύο σώματα ισορροπούν με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά $\Delta\ell_2$, οπότε εφαρμόζουμε για το σύστημα των σωμάτων την συνθήκη ισορροπίας:*

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_{o\lambda} \Rightarrow k\Delta\ell_2 = (m_1+m_2)g \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{(m_1+m_2)g}{k}$$

- *Στην θέση ισορροπίας του Σ_1 το ελατήριο είναι επιμυκησμένο κατά $\Delta\ell_1$, εφαρμόζω συνθήκη ισορροπίας:*

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k\Delta\ell_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k}$$

- *Σε μια τυχαία θέση που απέχει y κάτω από την θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη στο Σ_1 θα είναι:*

$$\Sigma F = w_1 - F_{\varepsilon\lambda} = m_1 g - k(\Delta\ell_1 + y)) = m_1 g - k\Delta\ell_1 - ky \Rightarrow \Sigma F = -ky$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k = 400\pi^2 N/m$

Δ.2 Να βρείτε τον αριθμό πλήρων ταλαντώσεων του σώματος μάζας Σ_1 όταν το σώμα μάζας Σ_2 φτάνει στο έδαφος.

Για την περίοδο της ταλάντωσης του Σ_1 έχουμε:

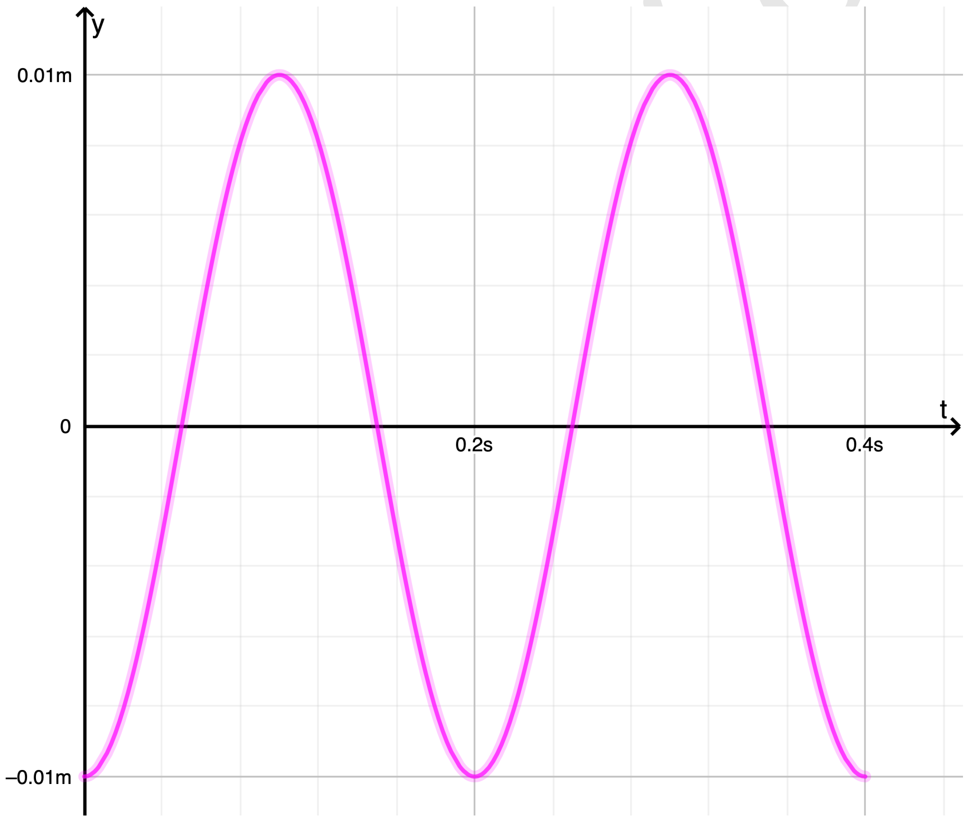
$$D = m_1\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\pi rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2s$$

Το Σ_1 εκτελεί ελεύθερη πτώση οπότε φτάνει στο έδαφος σε χρονικό διάστημα Δt για το οποίο ισχύει ότι:

$$h = \frac{1}{2} g \left(\Delta t\right)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,6s = 3T$$

Άρα εκτελεί 3 ταλαντώσεις.

Δ.3 Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας για το Σ_1 και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση για χρόνο δύο περιόδων της ταλάντωσης σε αριθμημένους άξονες. Να θεωρηθεί θετική η φορά προς τα πάνω.



Την στιγμή $t = 0$που κόβεται το νήμα τα σώματα είναι ακίνητα, άρα η ταλάντωση ξεκινά από την ακραία αρνητική θέση. Άρα:

$$A = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,05m$$

$$y = -A = A\eta\mu\left(\omega \cdot 0 + \phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = -1 \Rightarrow \phi_o = \frac{3\pi}{2} rad$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας θα είναι:

$$y = 0,01\eta\mu\left(10\pi \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$

Δ.4 Να βρεθεί ο λόγος του μέτρου της δύναμης επαναφοράς, προς το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου στην θέση που το Σ_1 ακινητοποιήται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$.

Το σώμα ακινητοποιείται για πρώτη φορά στην πάνω ακραία θέση:

$$\frac{\mid F_{\varepsilon\pi} \mid}{\mid F_{\varepsilon\lambda} \mid} = \frac{k \mid y \mid}{k\Delta\ell} = \frac{A}{A - \Delta\ell_1} = \frac{50}{49}$$

* *Προφανώς ο υπολογισμός του $\Delta\ell_1$ έχει γίνει παραπάνω.*

Δ.5 Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της Κινητικής ενέργειας του Σ_1 στην θέση που η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται ίση με την δυναμική ενέργειά της για πρώτη φορά.

Στην παραπάνω θέση ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow y = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$E = K + U \Rightarrow E = 2K \Rightarrow \frac{1}{2}m_1(\upsilon_{max})^2 = 2\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\frac{\upsilon_{max}}{\sqrt{2}}$$

΄Οταν διέρχεται για πρώτη φορά το σώμα από την παραπάνω θέση ανέρχεται άρα η απομάκρυνση είναι αρνητική και η ταχύτητα θετική. Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -D \cdot \left(-\frac{A}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\omega A}{\sqrt{2}} = 2\pi J/s$$