Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κρούσεις - Αρμονική Ταλάντωση

Ενδεικτικές Λύσεις

Σάββατο 1 Αυγούστου 2020

Ομάδα Α

Θέμα Α

Α.1. Σε κεντρική ανελαστική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών

(α) ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών μετατρέπεται σε θερμότητα

Α.2. Δύο σφαίρες Α και Β κινούμενες σε αντίθετες κατευθύνσεις συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά δημιουργώντας συσσωμάτωμα που ακινητοποιείται. Αν η σφαίρα Α έχει μάζα διπλάσια από τη σφαίρα Β, τότε τα μέτρα των αρχικών ορμών τους έχουν πηλίκο

(α) 1

Α.3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνση του από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο, δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα.

(γ) Ο ρυθμος μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας είναι θετικός στο χρονικό διάστημα $0 \to t_1$ και $t_2 \to t_3$

Α.4. Σώμα μάζας m είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α και ενέργεια Ε. Αν τριπλασιάσουμε το πλάτος ταλάντωσης του, τότε τριπλασιάζεται :

(δ) το πλάτος της επιτάχυνσης

Α.5.

(α) Όταν ένα σώμα συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με ένα δεύτερο σώμα ίδιας μάζας που κινείται, τότε τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες και ορμές. **Σωστό**

(β) Σε μάθε κρούση η ενέργεια παραμένει σταθερή. **Σωστό**

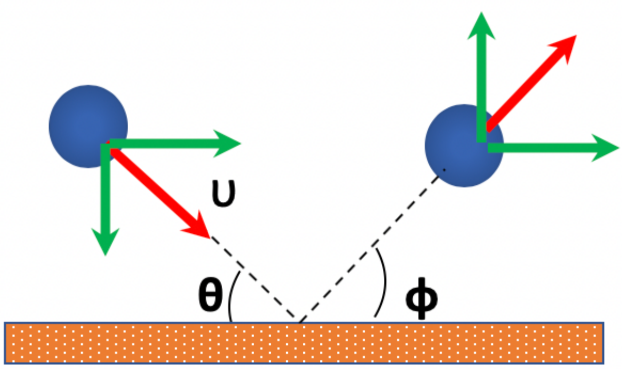
(γ) Η σταθερά επαναφοράς μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι ανάλογη της δύναμης επαναφοράς και της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας. **Λάθος**

(δ) Ένα σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο όταν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στο σώματα που το απαρτίζουν. **Λάθος**

(ε) όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η Κινητική και η δυναμική του ενέργεια μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Ένα σφαιρίδιο μάζας m προσπίπτει πλάγια σε δάπεδο με ταχύτητα μέτρου υ της οποίας η διεύθυνση σχηματίζει γωνία θ με το δάπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν σας είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες, τότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου θα είναι ίσο με:

(β) $2m\upsilon\eta\mu\theta$

Μετά την κρούση το σφαιρίδιο ανακλάται με ταχύτητα υ' με γωνία ϕ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή η κρούση είναι ελαστική:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 \Rightarrow \mid \upsilon \mid = \mid \upsilon' \mid$$

Η ορμή διατηρείται μόνο κατά τον άξονα $x'Ox$ άρα:

$$P_x = P'_x \Rightarrow m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta = m\upsilon'\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow \theta = \phi$$

Οπότε η συνολική μεταβολή της ορμής είναι εκείνη που θα προκύψει από την μεταβολή στον άξονα $y'Oy$

$$\Delta P = P'_y - P_y = -m\upsilon'\eta\mu\phi - m\upsilon\eta\mu\theta = -2m\upsilon\eta\mu\theta$$

Β.2. Μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 3m_1$. Το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταβιβάζεται εξαιτίας της κρούσης στην Σ_2 θα είναι ίσο με:

(α) 75%

Μετά την κρούση τα σώματα αποκτούν ταχύτητες υ'_1 και υ'_2 και κινητικές ενέργειες K'_1 και K'_2. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{K'_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon'^2_2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1} = 3\left(\frac{\upsilon'_2}{\upsilon_1}\right)^2 = 3\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = 0,75$$

Β.3. Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και σταθεράς επαναφοράς D. Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ ξεκινά την ταλάντωση του από θέση που η επιτάχυνση του έχει μέγιστο μέτρο και αρνητική αλγεβρική τιμή. Την χρονική στιγμή t_1 διέρχεται για πρώτη φορά από θέση που η Δυναμική ενέργεια είναι ίση με την Κινητική ενέργεια του. Το έργο της δύναμης επαναφοράς για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ θα είναι ίσο με:

(β) $\frac{1}{4}DA^2$

Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση και την χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται σε θέση x_1 για την οποία $K = U = \frac{E}{2}$ (αφού $E = K + U$). Το ζητούμενο έργο είναι:

$$W = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}DA^2$$

Θέμα Γ

Μια σημαδούρα μικρών διαστάσεων και μάζας $m = 2kg$, βρίσκεται μέσα σε μια τεχνητή λίμνη και εκτελεί με την επίδραση κατάλληλης δύναμης μια κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση. Για την ταλάντωση της σημαδούρας σας δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία:

- Εκτελεί 10 ταλαντώσεις κάθε 2 δευτερόλεπτα.

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{10}{2} = 5Hz \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 0,2s \Rightarrow \omega = 2\pi f = 10\pi\, rad/s$$

- Διανύει διάστημα 40 cm σε κάθε πλήρη ταλάντωση της.

$$4A = 40cm \Rightarrow A = 10cm = 0,1m$$

- Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ διέρχεται επιβραδυνόμενη από την θέση που το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ίσο με το μισό της μέγιστης τιμής της και η αλγεβρική της τιμή αρνητική.

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow -\frac{\omega^2 A}{2} = -\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

αφού επιταχύνεται η ταχύτητα θα έχει αντίθετη αλγεβρική τιμή από την επιτάχυνση, άρα θα είναι θετική. Υπολογίζω με τα παραπάνω την αρχική φάση της ταλάντωσης:

$$\frac{A}{2} = A\eta\mu\left(\omega \cdot 0 + \phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\phi_o = \frac{\pi}{6} \;\; \acute{\eta} \;\; \frac{5\pi}{6}$$

και αφού $\upsilon > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{6} rad$

Γ.1 Να υπολογιστεί το πλάτος, η περίοδος και η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης της.

Παραπάνω έχουν υπολογιστεί το πλάτος και η περίοδος της ταλάντωσης. Η σταθερά επαναφοράς θα είναι: $D = m\omega^2 = 2000N/m$

Γ.2 Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και της ταχύτητας της σημαδούρας.

$$x = 0,1\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \;\; (S.I.)$$

$$\upsilon = \pi\sigma\upsilon\nu\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \;\; (S.I.)$$

Γ.3 Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται η σημαδούρα ως συνάρτησης της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα.

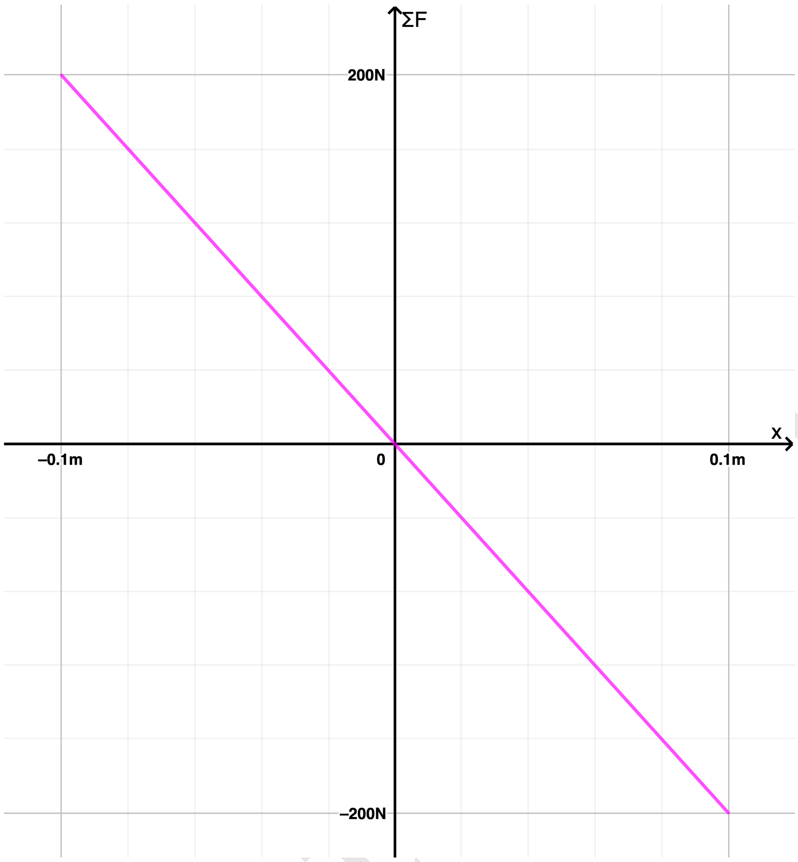
$$\Sigma F = -2000x \;\; -0,1 \leq x \leq 0,1 \;(S.I.)$$

Γ.4 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1 που η σημαδούρα θα περάσει για 1η φορά μετά την $t_o = 0$ από θέση που έχει την μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

Η θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας από την οποία διέρχεται για πρώτη φορά είναι η ακραία θετική θέση, άρα:

$$0,1 = 0,1\eta\mu\left(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 10\pi t + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30}s$$

Γ.5 Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής Ενέργειας και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής την χρονική στιγμή t_1.



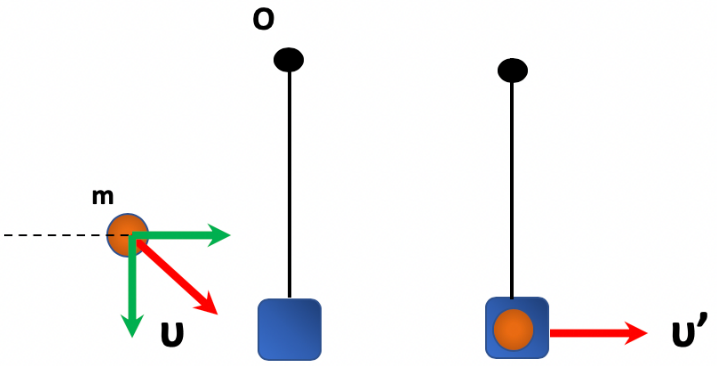
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -D \cdot x = -2000 \cdot 0,1 = -200N$$

Θέμα Δ

Κιβώτιο μικρό διαστάσεων και μάζας $M = 1,98kg$ είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $\ell = 0,4m$ και αρχικά ισορροπεί. Ένα βλήμα μάζας $m = 20gr$ σφηνώνεται, υπό γωνία $\phi = 60^o$ με ταχύτητα υ στο κιβώτιο.

Το συσσωμάτωμα που θα προκύψει αποκτά οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon' = 10m/s$ και αρχίζει να εκτελεί κυκλική κίνηση στο κατακόρυφο επίπεδο με το νήμα να παραμένει τεντωμένο αμέσως μετά την κρούση.



Δ.1 Να υπολογιστεί το μέτρο της ορμής του βλήματος ακριβώς πριν την κρούση.

Για την κρούση εφαρμόζω την ΑΔΟ στον άξονα $x'x$

$$m\upsilon\sigma\upsilon\nu\phi = (m+M)\upsilon' \Rightarrow \upsilon = 2000m/s$$

Δ.2 Να υπολογιστεί το ποσοστό % των ενεργειακών απωλειών εξαιτίας της κρούσης.

Το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\frac{\mid K'-K\mid}{K} = \mid \frac{K'}{K} - 1 \mid = \mid \frac{\frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2}{\frac{1}{2}m\upsilon^2} - 1 \mid = \frac{399}{400} \Rightarrow \frac{399}{4}\%$$

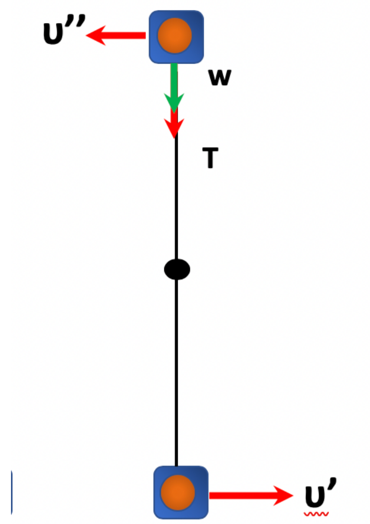
Δ.3 Να εξετάσετε αν το συσσωμάτωμα θα διαγράψει πλήρη κατακόρυφο κύκλο (ανακύκλωση).

Στην ανώτερη θέση της κυκλικής τροχιάς του το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα υ'' και δέχεται το βάρος του και την τάση του νήματος. Για να εκτελέσει ανακύκλωση πρέπει η τάση του νήματος να μην μηδενίζεται.

$$\Sigma F = (m+M)g + T = \frac{(m+M)\upsilon''^2}{\ell} \Rightarrow T = \frac{(m+M)\upsilon''^2}{\ell} - (m+M)g$$

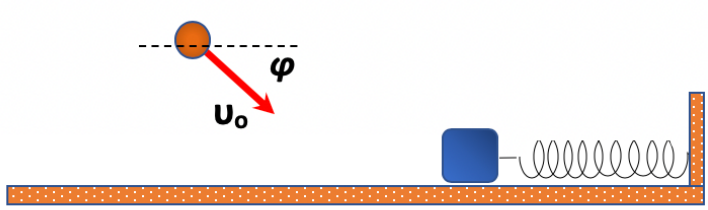
Για τον υπολογισμό της ταχύτητας στην ανώτερη θέση εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ κατά την άνοδο του:

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon''^2 - \frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2 = -(M+m)g2\ell \Rightarrow \upsilon'' = \sqrt{84}m/s$$



Άρα η τάση του νήματος θα είναι: $T = 400N$, άρα το νήμα παραμένει τεντωμένο, οπότε εκτελεί ανακύκλωση.

Ένα δεύτερο ίδιο κιβώτιο ισορροπεί πάνω σε λείο δάπεδο στερεωμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 198N/m$. Συμπιέζω το ελατήριο κατά $d = 1m$ και το αφήνω ελεύθερο. Όταν το σώμα διέρχεται από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου συγκρούεται με ένα ίδιο βλήμα που εκείνη την στιγμή κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_o που σχηματίζει γωνία $\phi = 60^o$ με την οριζόντια διεύθυνση με αποτέλεσμα το σύνολο της κινητικής ενέργειας του συστήματος κιβώτιο - βλήμα να γίνει θερμότητα.



Δ.4 Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του κιβωτίου την στιγμή που αφήνεται ελεύθερο.

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} = -kd = -198N$$

Δ.5 Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος ακριβώς πριν την κρούση, καθώς και το μέτρο της μεταβολή της ορμής του εξαιτίας της κρούσης.

Για την κίνηση του σώματος εφαρμόζω την ΑΔΜΕ πριν την κρούση.

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v = 10m/s$$

Επειδή το σύνολο της κινητική ενέργειας του συστήματος χάνεται εξαιτίας της κρούσης, το συσσωμάτωμα θα ακινητοποιηθεί μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα:

$$m\upsilon_o \sigma\upsilon\nu\phi - mv = 0 \Rightarrow \upsilon_o = 1980m/s$$

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος θα είναι ίση με:

$$\Delta P = 0 - m\upsilon_o = -39,6kg \cdot m/s$$