
Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

2η Προσομοίωση Εξετάσεων

Ενδεικτικές Απαντήσεις

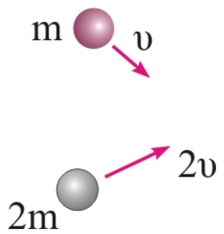
Κυριακή 7 Ιουνίου 2020

Θέμα Α

Α.1. Στις φθίνουσες ταλαντώσεις στις οποίες η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας, τα φυσικά μεγέθη που έχουν πάντα την ίδια φορά είναι :

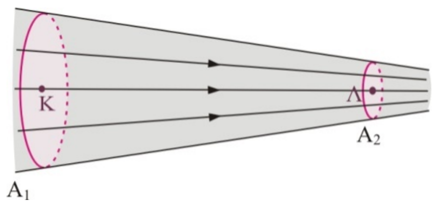
(δ) η συνισταμένη δύναμη και η επιτάχυνση.

Α.2. Ένα σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα μέτρου υ συγκρούεται πλάγια και ανελαστικά με δεύτερο σώμα μάζας $2m$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου 2υ όπως στο σχήμα.



Κατά τη διάρκεια της κρούσης τιμή ίση με μηδέν έχει η

(β) μεταβολή της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων.



Α.3. Ο οριζόντιος σωλήνας του σχήματος είναι μεταβλητής διατομής όπου $A_1 > A_2$ και στο εσωτερικό του ρέει ιδανικό υγρό. Η ενέργεια που προσφέρεται στο υγρό λόγω της διαφοράς πίεσης

(α) ισούται με την αύξηση της κινητικής ενέργειας του υγρού.

Α.4. Σύνθετη κίνηση εκτελεί:

(γ) μια ρακέτα, αν κρατώντας την οριζόντια, από τη λαβή, την πετάξουμε ψηλά.

Α.5.

(α) Η κίνηση που προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων εξαρτάται και από τις διευθύνσεις των επιμέρους αρμονικών ταλαντώσεων. **Σωστό**

(β) Στο υγρό ενός δοχείου που βρίσκεται εκτός βαρυτικού πεδίου επικρατεί η ίδια πίεση σε όλα του τα σημεία. **Σωστό**

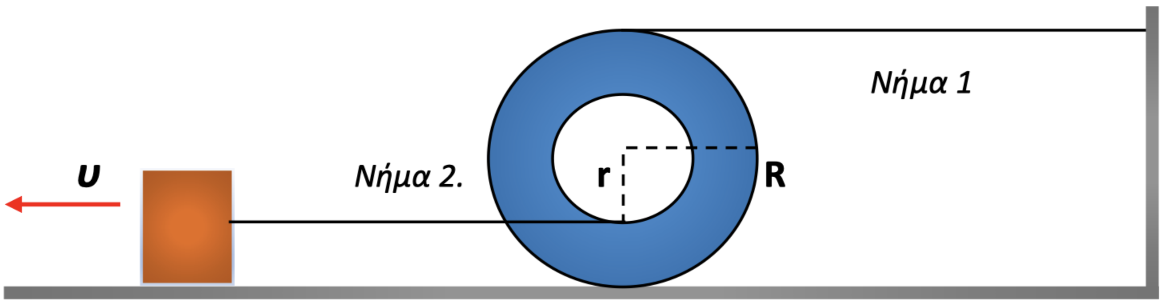
(γ) Ένα υλικό σημείο έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις. **Σωστό**

(δ) Η στιγμιαία ισχύς σ' έναν ωμικό αντιστάτη μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. **Λάθος**

(ε) Κατά την διάρκεια ενός σεισμού τα κτήρια εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα που εξαρτάται από το ύψος τους. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Στερεό σώμα αποτελείται από δύο ομογενής δίσκους που είναι κολλημένοι μεταξύ τους και μπορεί να ολισθαίνει στο δάπεδο. Στην περιφέρεια του μεγάλου δίσκου ακτίνας R είναι τυλιγμένο το Νήμα (1), έχοντας το ελεύθερο άκρο του ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Στην περιφέρεια του μικρότερου δίσκου ακτίνας $r = \frac{R}{2}$ είναι τυλιγμένο το Νήμα (2), έχοντας το ελεύθερο άκρο του ακλόνητα στερεωμένο σε σώμα Σ.



Το σώμα Σ μπορεί κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ και το Στερεό σώμα μέσω αυτού κυλίεται στο οριζόντιο δάπεδο. Τα δύο νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά και δεν ολισθαίνουν όταν τυλίγονται ή ξετυλίγονται στους δίσκους. Σε ένα χρονικό διάστημα Δt το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά S_1 και το κέντρο μάζας του Στερεού θα έχει μετατοπιστεί κατά S_2. Για τις δύο μετατοπίσεις ισχύει

(γ) $2S_1 = 3S_2$

Κάθε σημείο του νήματος (1) θα παραμένει ακίνητο, αφού είναι δεμένο στο δεξί του άκρο. Αφού δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του μεγάλου δίσκου, τότε και η ταχύτητα του σημείου επαφής με αυτόν θα είναι μηδέν. Άρα το στερεό θα περιστρέφεται δεξιόστροφα, ώστε η γραμμική ταχύτητα λόγω της περιστροφικής κίνησης να είναι σε αυτό το σημείο αντίθετη με την ταχύτητα εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης.

$$\upsilon_1 = \upsilon_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R$$

Η ταχύτητα κάθε σημείου του νήματος (2) θα είναι ίση με την ταχύτητα του σώματος και αφού το νήμα δεν ολισθαίνει στο σημείο επαφής του με τον μικρό δίσκο η ταχύτητα θα είναι επίσης η ίδια.

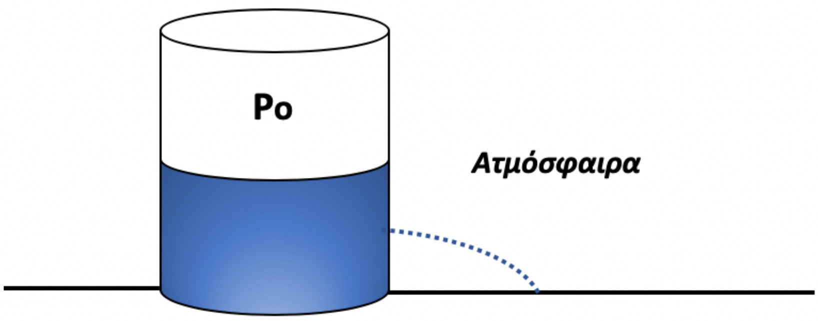
$$\upsilon = \upsilon_{cm} + \omega\frac{R}{2} = \frac{3}{2}\upsilon_{cm}$$

**και στα δύο σημεία έχω εφαρμόσει την αρχή της επαλληλίας για τον υπολογισμό των ταχυτήτων ($\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon_{cm}} + \vec{\upsilon_{\gamma\rho}}$)*

Για τις μετατοπίσεις έχουμε:

$$\upsilon = \frac{3}{2}\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3}{2}\frac{\Delta x_{cm}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \frac{3}{2}\Delta x_{cm} \Rightarrow 2S_1 = 3S_2$$

B.2. Μια μεγάλη Δεξαμενή ύψους H που το πάνω μέρος της είναι κλειστό περιέχει νερό μέχρι το μέσο της. Στο πάνω μέρος του νερού είναι εγκλωβισμένος αέρας υπό πίεση P_o. Κάποια χρονική στιγμή ανοίγουμε μια μικρή οπή στο πλευρικό τοίχωμα της δεξαμενής και σε ύψος $\frac{H}{4}$ από το έδαφος, οπότε εκρέει από αυτή νερό. Το νερό καταλήγει στο έδαφος έχοντας διανύσει οριζόντια απόσταση H.



Θεωρώντας ότι το νερό είναι ιδανικό ρευστό και ότι η διατομή της οπής είναι πολύ μικρότερη από την διατομή της δεξαμενής η πίεση P_o του εγκλωβισμένου αέρα θα είναι:

(α) $P_{atm} + \rho g\frac{3H}{4}$

Η πυκνότητα του νερού είναι ρ *, η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι* g *και η ατμοσφαιρική πίεση είναι* P_{atm}

Εφαρμόζω την εξίσωση Bernoulli πάνω σε μια ρευματική γραμμή που εκκινεί από την επιφάνεια του υγρού και καταλήγει στην οπή, λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιφάνεια του υγρού δεν έχει ταχύτητα αφού η οπή είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την διατομή του δοχείου.

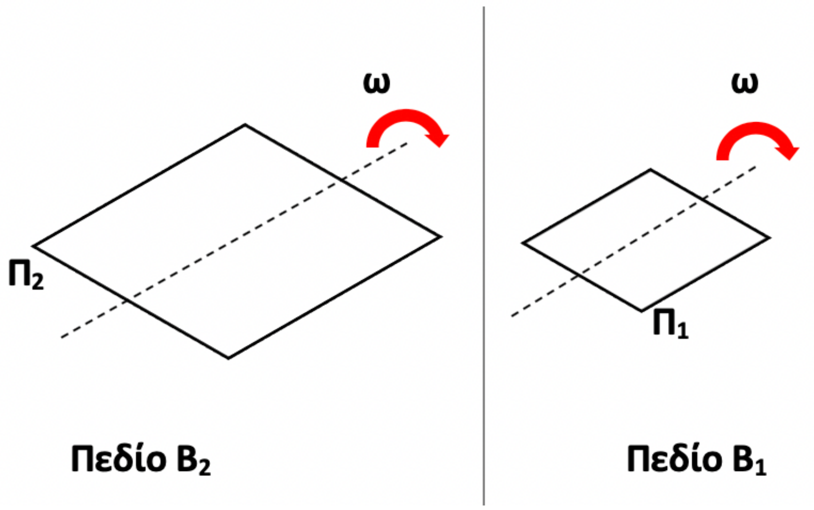
$$P_o + \rho g \frac{H}{2} = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g \frac{H}{4}$$

Για την οριζόντια βολή της φλέβας ρευστού ισχύει ότι:

$$S = \upsilon t_{\pi\tau} \Rightarrow H = \upsilon \sqrt{\frac{2\frac{H}{4}}{g}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gH}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η απάντηση...

Β.3. Δύο τετραγωνικά αγώγιμα πλαίσια Π_1 και Π_2 και αμελητέας αντίστασης, με μήκη πλευρών α και 2α αντίστοιχα, στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ομογενή μαγνητικά πεδία εντάσεων B_1 και B_2 αντίστοιχα. Οι μέγιστες μαγνητικές ροές που διέρχονται από κάθε πλαίσιο, συνδέονται με τη σχέση $\Phi_1 = 2\Phi_2$.



Στα άκρα του Π_1 συνδέουμε αντιστάτη αντίστασης R_1 και στα άκρα του Π_2 αντιστάτη αντίστασης R_2 με $R_2 = 2R_1$ Ο λόγος των μέσων ισχύων στους δύο αντιστάτες είναι:

(γ) $\dfrac{P_1}{P_2} = 8$

Για ένα πλαίσιο με N σπείρες και εμβαδόν A, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε μαγνητικό πεδίο B η μέγιστη τάση που αποκτά θα είναι $V = N\omega BA = N\omega\Phi_{max}$

Η μέση ισχύς που καταναλώνει ένας αντιστάτης αντίστασης R όταν συνδεθεί στο περιστρεφόμενο πλαίσιο θα είναι $\bar{P} = \dfrac{V_{\varepsilon\upsilon}^2}{R} = \dfrac{V^2}{2R}$

Με δεδομένο ότι $N = 1, \omega_1 = \omega_2$Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{(N\omega\Phi_1)^2}{2R_1}}{\frac{(N\omega\Phi_2)^2}{2R_2}} = 8$$

Θέμα Γ

Δύο οριζόντια σύρματα Ax και Γy έχουν αμελητέα αντίσταση και τα άκρα τους A και Γ γεφυρώνονται με αντίσταση $R = 4$ Ω. Αγωγός ΚΛ έχει μήκος $\ell = 1m$, μάζα $m = 2kg$, αντίσταση $R_{K\Lambda} = 16$ Ω και μπορεί να κινείται, χωρίς τριβές, με τα άκρα του πάνω στα σύρματα.

Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κατά την οποία ο αγωγός ΚΛ έχει ταχύτητα μέτρου $v_o = 10m/s$ ασκείται σ'άυτον κατάλληλη εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ ομόρροπη προς την ταχύτητα του και ο αγωγός ΚΛ αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 2m/s^2$.

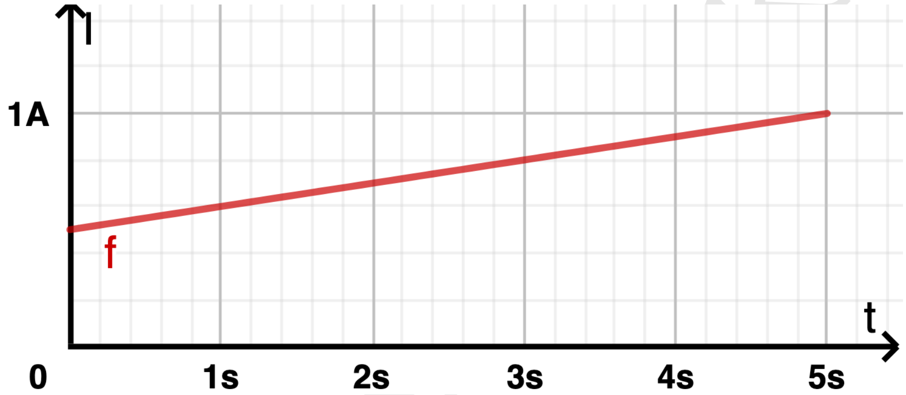
Γ.1 Να υπολογισθεί και να αποδοθεί γραφικά η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Η κίνηση της ΚΛ έχει ως συνέπεια την εμφάνιση επαγωγικής τάσης στα άκρα της, άρα και επαγωγικού ρεύματος που η φορά του θα είναι τέτοια, ώστε να δημιουργεί δύναμη $Laplace$ πάνω στην ράβδο η οποία να αντιστέκεται στην κίνηση, άρα να έχει φορά αντίθετη στην $\vec{F}$.

Για μετατόπιση κατά Δx έχουμε αύξηση της μαγνητικής ροής μέσα από την επιφάνεια που ορίζεται από την ράβδο, τα οριζόντια σύρματα και την αντίσταση κατά $\Delta\Phi = B\ell\Delta x$, όποτε σύμφωνα με τον Νόμο του $Faraday$ η επαγωγική ΗΕΔ θα είναι $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta x}{\Delta t} = B\upsilon\ell$

Το επαγωγικό ρεύμα θα είναι:

$$I = \frac{E}{R + R_{K\Lambda}} = \frac{B\upsilon\ell}{R + R_{K\Lambda}} = \frac{B(\upsilon_o + \alpha t)\ell}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I = 0,5 + 0,1t \ (S.I.)$$



Γ.2 Να βρεθεί το φορτίο που διέρχεται από τον αντιστάτη αντίστασης R στα πρώτα $5s$ της κίνησης του αγωγού.

$$\Delta q = \text{εμβαδον} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2,5C$$

** Εναλλακτικά μπορούμε να δουλέψουμε με τον νόμο του $Neumann$:*

$$\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R + R_{K\Lambda}} = \frac{B\ell\Delta x}{R + R_{K\Lambda}} = \frac{B\ell\left(\upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2\right)}{R + R_{K\Lambda}}$$

Γ.3 Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ με τον οποίο αυξάνεται η ένταση του ρεύματος.

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{B\upsilon\ell}{R + R_{K\Lambda}}\right) = \frac{B\alpha\ell}{R + R_{K\Lambda}} = 0,1A/s$$

** Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την κλίση της ευθείας στο διάγραμμα.*

Γ.4 Να υπολογίσεται το μέτρο F της εξωτερικής δύναμης τη χρονική στιγμή $t = 5s$.

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F - BI\ell = m\alpha \Rightarrow F = 5N$$

Γ.5 Την χρονική στιγμή $t = 5s$ καταργώ την δύναμη $\vec{F}$, οπότε η ράβδος επιβραδύνεται μέχρι να σταματήσει. Να βρεθεί η συνολική θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον κατά την επιβραδυνόμενη κίνηση του αγωγού.

$$E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}} + Q \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 0 + Q \Rightarrow Q = 400Joule$$

Η φορά του μαγνητικού πεδίου είναι από τον αναγνώστη προς την σελίδα.

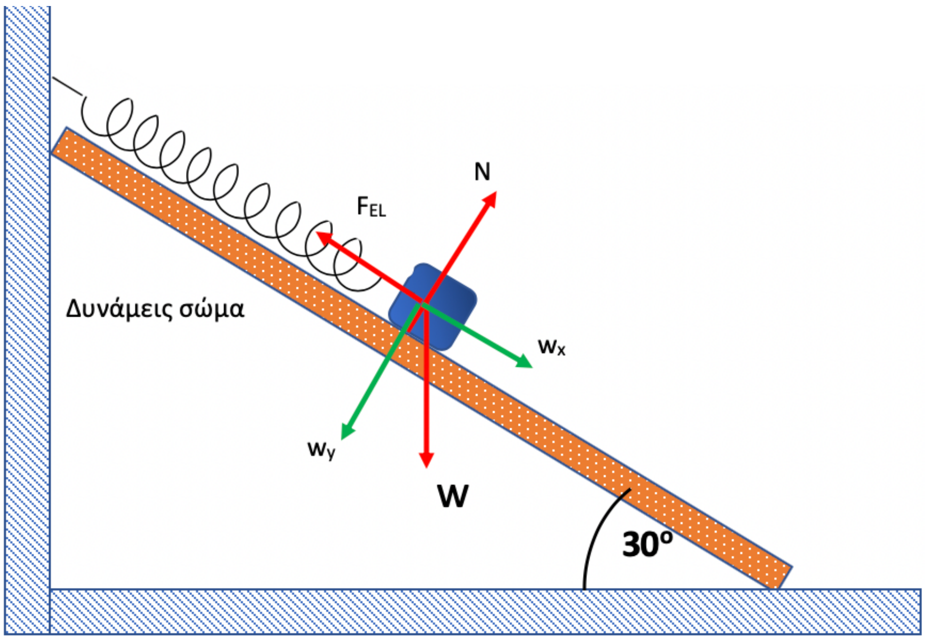
Θέμα Δ

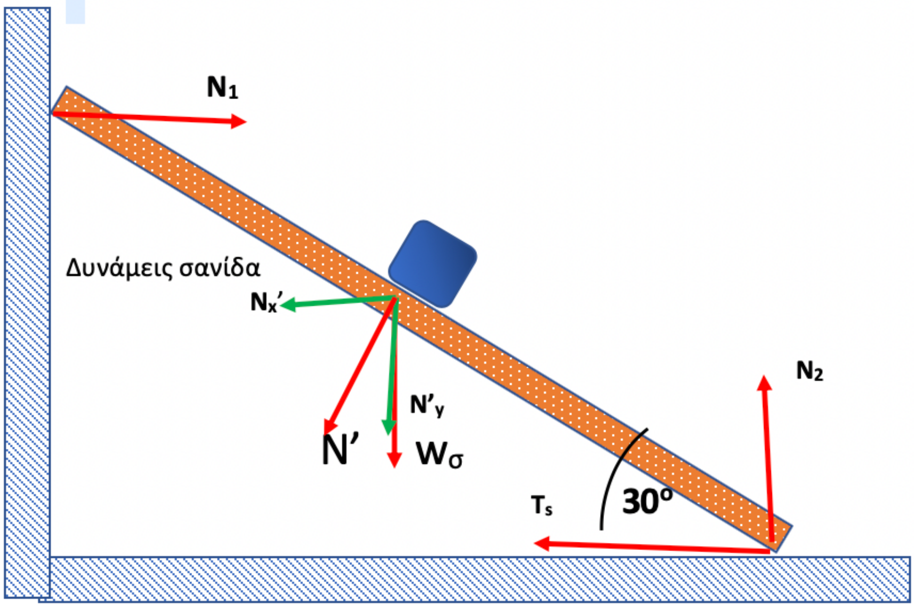
Τοποθετώ μια σανίδα ΚΛ μάζας $M = 6kg$ και μήκους $L = 1m$ ανάμεσα σε λείο τοίχο και τραχύ δάπεδο, σχηματίζοντας ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^o$.

Στερεώνω κατάλληλα στον τοίχο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 50N/m$ στο κάτω άκρο του οποίο αναρτώ σώμα μάζας $m = 4kg$. Το σύστημα ισορροπεί με το σώμα να βρίσκεται στο μέσο Ο της σανίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Δ.1 Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο και η δύναμη που δέχεται από το δάπεδο.

*Η σανίδα δέχεται **από τον τοίχο οριζόντια δύναμη μέτρου** N_1 με φορά προς τα δεξιά και **από το δάπεδο** μια κατακόρυφη δύναμη μέτρου N_2 με*





φορά προς τα πάνω και την οριζόντια στατική τριβή T_s με φορά προς τα αριστερά. Το σώμα που ισορροπεί πάνω στην σανίδα δέχεται από αυτή κάθετη προς την σανίδα δύναμη μέτρου N και ασκεί στην σανίδα δύναμη επίσης κάθετη $N' = -N$. (για το σώμα ισχύει $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi = N$).

Για την ισορροπία της σανίδας έχουμε:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow N_1 L\eta\mu 30 - Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30 - N'\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = 50\sqrt{3}N$$

Επιλέγω ένα σύστημα συντεταγμένων (να γίνει σχήμα) βάζοντας το άξονα y παράλληλο στοπ βάρος της σανίδας, άρα αναλύω την N' σε κάθετες συνιστώσες $N'_y = N'\sigma\upsilon\nu 30$, $N'_x = N'\eta\mu 30$. Οπότε για την σανίδα έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_s + N'_x = N_1 \Rightarrow T_s = 30\sqrt{3}N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = Mg + N'_y \Rightarrow N_2 = 90N$$

Η δύναμη από το δάπεδο θα είναι η συνισταμένη της κάθετης και της οριζόντιας δύναμης δηλαδή: $F_\delta = \sqrt{N_2^2 + T_s^2} = 60\sqrt{3}N$ και θα σχηματίζει με το δάπεδο γωνία θ για την οποία θα ισχύει: $\epsilon\phi\theta = \dfrac{N_2}{T_s} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^o$

Σε μια χρονική στιγμή που την θεωρούμε ως $t_o = 0$ το σώμα διασπάται λόγο έκρηξης στο εσωτερικό του σε δύο κομμάτια T_1 και T_2 ίσης μάζας, χωρίς να χάνεται καθόλου μάζα κατά την έκρηξη. Το ένα τμήμα T_1 μάζας m_1, παραμένει στερεωμένο στο ελατήριο και αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς $D = k$. Το δεύτερο τμήμα T_2 μάζας m_2 μετά την έκρηξη αποκτά κινητική ενέργεια $K_2 = 1J$ και κινείται προς την βάση της σανίδας.

Δ.2 Να υπολογιστεί το πλάτος και η περίοδος ταλάντωσης του T_1.

Μετά την έκρηξη τα δύο κομμάτια θα αποκτήσουν ταχύτητες μέτρου υ_1 και υ_2 που θα υπολογιστούν από την Διατήρηση της Ορμής:

$$0 - m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = -\upsilon_2$$

Με δεδομένο ότι γνωρίζουμε την κινητική ενέργεια του ενός τμήματος έχουμε $K_2 = \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_2 = 1m/s$

Πριν την έκρηξη *το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο να είναι επιμηκυσμένο κατά* $\Delta\ell_1$, $\Sigma f_x = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_1 - mg\eta\mu 30 \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,4m$

Μετά την έκρηξη *η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του τμήματος θα είναι σε ανώτερη θέση με το ελατήριο να είναι επιμηκυσμένο κατά* $\Delta\ell_2$, $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_2 - m_1 g\eta\mu 30 \Rightarrow \Delta\ell_2 = 0,2m$

Άρα η θέση μετά την έκρηξη είναι μια τυχαία θέση με ταχύτητα $\upsilon_1 = 1m/s$ *και φορά προς τα πάνω και απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας* $x = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 = 0,2m$. *Εφαρμόζουμε την* ***ΑΔΕΤ για τον υπολογισμό του πλάτους ταλάντωσης.***

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow A = 0,2\sqrt{2}m$$

Για την περίοδο της ταλάντωσης έχουμε:

$$D = k = m_1\omega^2 \Rightarrow \omega = 5rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4\pi s$$

Δ.3 Να γράψετε την χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής για το T_1, θεωρώντας ως θετική την φορά της ταχύτητας του μετά την έκρηξη.

Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ *έχουμε ότι* $x = -0,2m$ *και* $\upsilon > 0$.

$$-0,2 = 0,2\sqrt{2}\eta\mu\phi_o \Rightarrow \eta\mu\phi_o == -\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\upsilon > 0 \Rightarrow \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\phi_o > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0$$

Από την λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης και με δεδομένο ότι $0 \leq \phi_o < 2\pi$ *προκύπτει ότι* $\phi_o = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}rad$. *Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:*

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -DA\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right) = -10\sqrt{2}\eta\mu\left(5t + \frac{7\pi}{4}\right) \quad (S.I.)$$

Δ.4 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Κινητικής ενέργειας του T_1 την χρονική στιγμή $t_1 = 0,1\pi s$ καθώς και το έργο της δύναμης του ελατηρίου για την μετακίνηση από την t_0 έως την t_1.

$$x_1 = 0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(5 \cdot 0,1\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = 0,2m$$

Άρα την χρονική στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από την θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Η ταχύτητα θα είναι:

$$\upsilon = 5 \cdot 0,2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(5 \cdot 0,1\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = 1m/s$$

Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -D \cdot x \cdot \upsilon = -10J/s$$

Δ.5 Αν την $t_o = 0$ δεν γίνονταν έκρηξη και το σώμα εκτοξευόνταν με ταχύτητα $\upsilon_o = \frac{\sqrt{2}}{2}m/s$, να βρεθεί η οριακή τιμή της στατικής τριβής ανάμεσα στην σανίδα και το δάπεδο, ώστε η σανίδα να μην ολισθαίνει κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος.

Αν εκτοξευόνταν από την θέση ισορροπίας με αυτή την ταχύτητα θα αποκτούσε πλάτος ταλάντωσης A' για το οποίο έχουμε:

$$\upsilon'_{max} = \omega' A' \Rightarrow \upsilon'_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A' \Rightarrow A' = 0,2m$$

Όταν το σώμα βρίσκεται σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας κάτω από αυτή για την ισορροπία της σανίδας ισχύει:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow N_1 L\eta\mu 30 - Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30 - N'\left(\frac{L}{2} + x\right) = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30 + N'\left(\frac{L}{2} + x\right)}{L\eta\mu 30}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_s = N_1 - N'\eta\mu 30 = 15\sqrt{3} - 20 - 20x$$

Άρα γίνεται μέγιστη στη θέση $x = -A'$. Για να μην γλυστράει η σανίδα πρέπει:

$$T_s \leq T_{s(max)} \Rightarrow T_{s(max)} = 15\sqrt{3} - 20 + 4 = (15\sqrt{3} - 16)N$$