Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

1η Προσομοίωση Εξετάσεων

Ενδεικτικές Λύσεις

Πέμπτη 16 Απριλίου 2020

Θέμα Α

A.1. Ένα κλειστό δοχείο περιέχει ιδανικό ρευστό που ισορροπεί. Το δοχείο έχει προσαρμοσμένα δύο μανόμετρα με το (1) να βρίσκεται στο πάνω μέρος του και το (2) στο κάτω μέρος του.

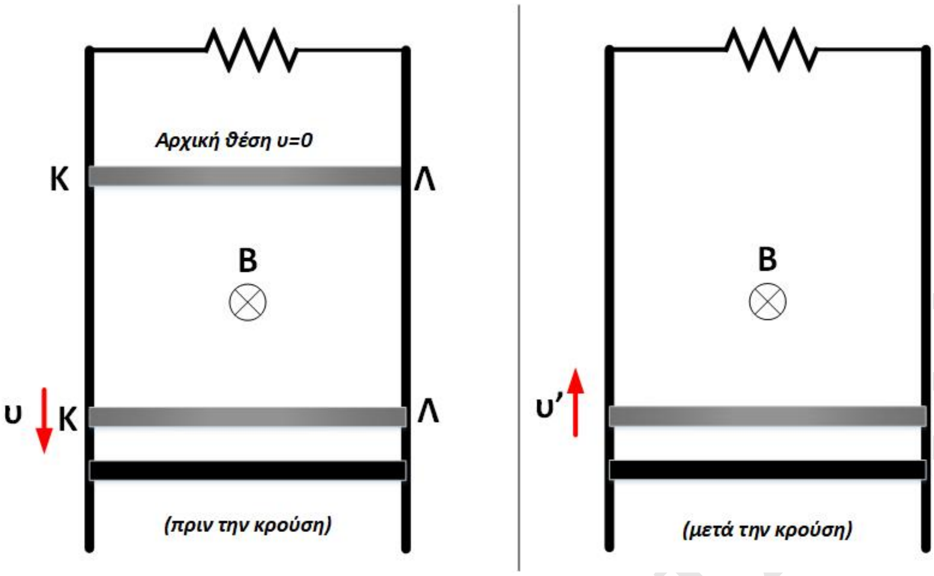
(γ) Τα μανόμετρα θα έχουν την ίδια ένδειξη αν το δοχείο είναι εκτός πεδίου βαρύτητας.

A.2. Μια αγώγιμη ράβδος μπορεί να κινείται πάνω σε κατακόρυφες αγώγιμες σιδηροτροχιές που συνδέονται μεταξύ τους μέσω αντίστασης στο πάνω άκρο τους. Κάθετα στο επίπεδο της ράβδου και των σιδηροτροχιών εφαρμόζεται ομογενές μαγνητικό πεδίο και η ράβδος αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί με την επίδραση του βάρους της. Όταν η ράβδος αποκτά την μέγιστη δυνατή ταχύτητα κατά την κάθοδο της συγκρούεται ελαστικά με δεύτερη ακίνητη ράβδο και ανακρούει προς τα πίσω, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση θα είναι:

(δ) $-2g$

A.3. Ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση αναρτημένο σε ελατήριο, με την επίδραση δύναμης $F = F_o \eta\mu(2\pi f t)$, μέσω ενός μηχανισμού. Διαπιστώθηκε ότι η όταν η συχνότητα του διεγέρτη πάρει τις τιμές $f_1 = 5Hz$ και $f_2 = 15Hz$ το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι το ίδιο. Για την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου σώματος ισχύει:



(δ) $f_1 < f_o < f_2$

Α.4. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A. Κάποια στιγμή που βρίσκεται σε ακραία θέση δέχεται δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$, με b μικρή θετική σταθερά και το πλάτος της μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο. Όταν το σώμα θα έχει χάσει το 75% της ενέργειας του το πλάτος ταλάντωσης του θα είναι:

(α) $\dfrac{A}{2}$

Α.5.

- **(α)** Σύμφωνα με τον κανόνα του $Lentz$ το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά ώστε να αντιστέκεται στην αύξηση ή την μείωση της μαγνητικής ροής. **Σωστό**
- **(β)** Το πλάτος της τάσης στο οικιακό μας δίκτυο είναι $220 volt$ **Λάθος**
- **(γ)** Όλα τα σημεία ενός τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχουν την ίδια ταχύτητα. **Λάθος**
- **(δ)** Μαγνητική ροή μέσα από ένα αγώγιμο πλαίσιο που μεταβάλλετε περιοδικά με τον χρόνο έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία σταθερής τάσης στα άκρα του πλαισίου **Λάθος**

(ε) Η μεταφορική κίνηση ενός στερεού σώματος είναι πάντα ευθύγραμμης τροχιάς. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση για την οποία η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο θα είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t) + A\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

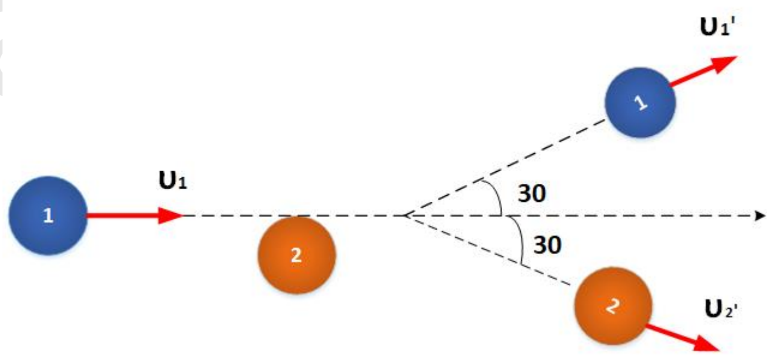
η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης αυτής θα είναι ίση με:

(β) $\omega 2A$

$$\upsilon_{max} = \omega A' = \omega\sqrt{A^2 + \left(A\sqrt{3}\right)^2 + 2AA\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = \omega 2A$$

* *προφανώς έχω χρησιμοποιήσει ότι* $\sigma\upsilon\nu(\omega t) = \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Β.2. Σφαίρα Α μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα και συγκρούεται έκκεντρα με ακίνητη σφαίρα Β μάζας $2m$. Μετά την κρούση, οι δύο σφαίρες κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις που σχηματίζουν την ίδια γωνία $\theta = 30^o$ με την αρχική διεύθυνση της σφαίρας Α, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο λόγος της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α που μεταφέρθηκε στη σφαίρα Β κατά την κρούση ισούται με:

(α) $\frac{1}{6}$

Διατήρηση της ορμής στον άξονα y

$$0 + 0 = m\upsilon_1'\eta\mu 30 - 2m\upsilon_2'\eta\mu 30 \Rightarrow \upsilon_1' = 2\upsilon_2'$$

Διατήρηση της ορμής στον άξονα x

$$m\upsilon_1 = m\upsilon_1'\sigma\upsilon\nu 30 + 2m\upsilon_2'\sigma\upsilon\nu 30 \Rightarrow \upsilon_1 = 2\sqrt{3}\upsilon_2'$$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{K_B'}{K_A} = \frac{\frac{1}{2}2m\upsilon_2'^2 =}{\frac{1}{2}m\upsilon_1^2} = \frac{2\upsilon_2'^2}{\upsilon_1^2} = \frac{1}{6}$$

Β.3. Ένα σωληνοειδές πηνίο με N ομοιόμορφα τυλιγμένες σπείρες,μήκος L και αντίσταση R συνδέεται με μια ιδανική πηγή με ΗΕΔ E, οπότε στο κέντρο του δημιουργείται μαγνητικό πεδίο έντασης B. Αν κόψω το σωληνοειδές στην μέση και το συνδέσω με την ίδια πηγή τότε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του θα έχει ένταση B' για την οποία ισχύει:

(β) $B' = 2B$

Για το σωληνοειδές πηνίο:

$$B = k_\mu 4\pi n I, \quad n = \frac{N}{L}$$

Η αντίσταση του σωληνοειδούς είναι ανάλογη του μήκους του $\left(R = \rho\frac{l}{A}\right)$, *άρα όταν το κοπεί η αντίσταση θα υποδιπλασιαστεί.*

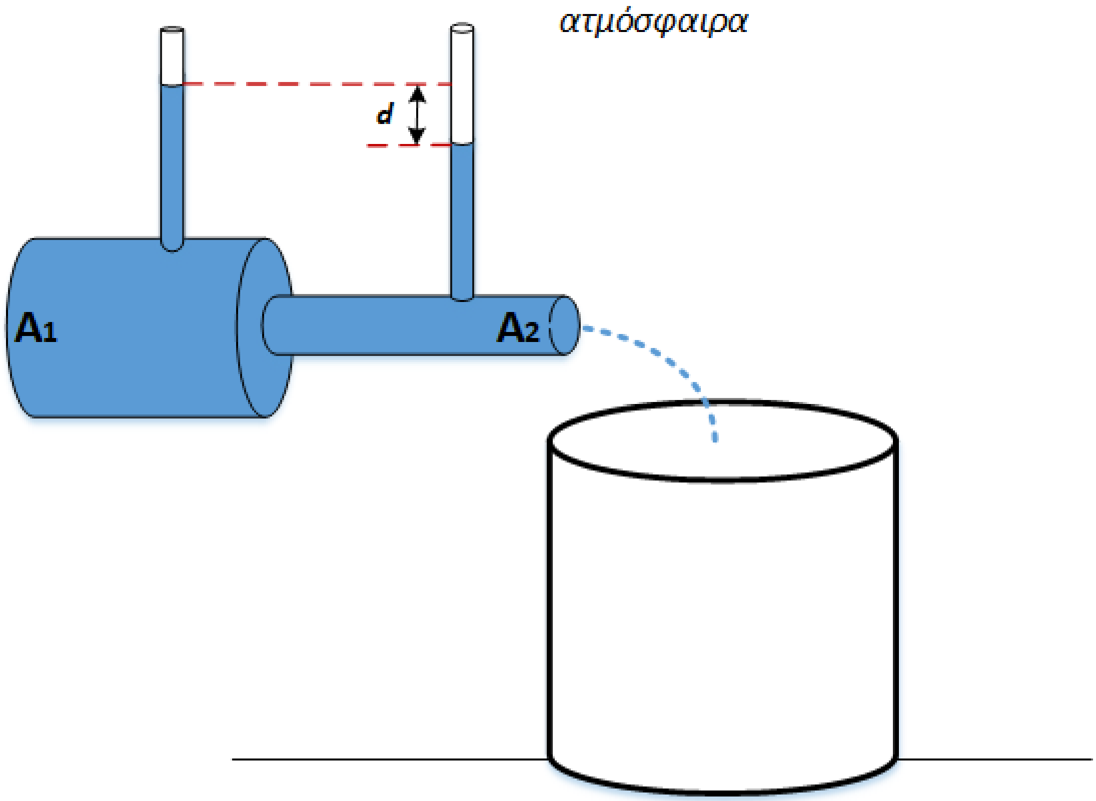
Για το ρεύμα στο κύκλωμα ισχύει:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I' = 2I$$

Με δεδομένο ότι η πυκνότητα σπειρών n δεν θα αλλάξει, το μαγνητικό πεδίο θα διπλασιάζεται.

Θέμα Γ

Σε ένα σωλήνα που διαρρέεται από νερό και έχει διατομή $A_1 = 40cm^2$ έχουμε προσαρμόσει ένα ροόμετρο Venturi με στόχο να μετρήσουμε την ταχύτητα ροής του νερού. Το ροόμετρο έχει στο ένα τμήμα του διατομή ίδια με του σωλήνα και στο άλλο διατομή $A_2 = \frac{A_1}{4}$ και οι δύο κατακόρυφοι σωλήνες έχουν την ίδια διατομή και είναι ανοικτοί στο πάνω μέρος τους. Σας είναι γνωστό ότι η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στους δύο σωλήνες είναι $d = 0,75m$



Γ.1 Να υπολογίσετε την μεταβολή της πίεσης του νερού ανάμεσα σε δύο σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής που βρίσκονται στο τμήμα μεγάλης και στο τμήμα μικρής διατομής.

Για μια ρευματική γραμμή κατά μήκος του σωλήνα εφαρμόζω την εξίσωση Bernoulli για δύο σημεία 1 και 2 κάτω από τα κατακόρυφα σωληνάκια

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Εφαρμόζω την εξίσωση της συνέχειας:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\upsilon_1$$

Στα κατακόρυφα σωληνάκια το ρευστό ισορροπεί σε ύψη h_1 και h_2 και εφαρμόζω την εξίσωση της ισορροπίας

$$P_1 = P_{atm} + \rho g h_1$$
$$P_2 = P_{atm} + \rho g h_2$$

Από τα παραπάνω και με δεδομένο ότι $h_1 - h_2 = d$ θα προκύψουν: $P_1 - P_2 = 0,75 \cdot 10^4 Pa$, $\upsilon_1 = 1m/s$, $\upsilon_2 = 4m/s$

Γ.2 Να υπολογίσετε την Παροχή του σωλήνα.

$$\Pi = A_2\upsilon_2 = 4 \cdot 10^{-3} m^3/s$$

Γ.3 Με τον παραπάνω σωλήνα γεμίζουμε μια άδεια κυλινδρική δεξαμενή με εμβαδόν διατομής $A = 1m^2$. Σε πόσα λεπτά το ύψος της στάθμης της δεξαμενής θα είναι $H = 2m$; Ποιο θα είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται ο πυθμένας της δεξαμενής όταν θα σταθεροποιηθεί η στάθμη στο παραπάνω ύψος;

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{AH}{\Pi} = 500s \simeq 8,33min$$

Η δύναμη στον πυθμένα θα είναι κάθετη σε αυτόν με φορά προς τα κάτω. Το μέτρο της θα είναι:

$$F = PA = \left(P_{atm} + \rho g H\right) A = 1,2 \cdot 10^5 N$$

Γ.4 Αφού σταθεροποιηθεί το νερό στο ύψος H ανοίγουμε μια πολύ μικρή οπή στην κυλινδρική δεξαμενή σε απόσταση y από το έδαφος, ώστε να έχουμε το μέγιστο δυνατό βεληνεκές για την φλέβα ρευστού που θα εκρέει από την οπή. Να υπολογιστεί η απόσταση y και το βεληνεκές.

Για μια ρευματική γραμμή που ενώνει ένα σημείο της επιφάνειας του ρευστού και ένα σημείο στην οπή, εφαρμόζω την εξίσωση $Bernulli$ με την υπόθεση ότι το σημείο της επιφάνειας είναι ακίνητο, αφού η οπή είναι πολύ μικρή σε σχέση με την διατομή του δοχείου.

$$P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g y \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2g(H-y)}$$

Το βεληνεκές θα είναι:

$$S = \upsilon t = \sqrt{2g(H-y)}\sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{4y(H-y)}$$
$$\Rightarrow S^2 = 4yH - 4y^2 \Rightarrow 4y^2 - 4Hy + S^2 = 0$$

Για να έχει η εξίσωση 2ου βαθμού πραγματικές λύσεις θα πρέπει:

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 16H^2 - 16S^2 \geq 0 \Rightarrow H \geq S \Rightarrow S_{max} = H = 2m$

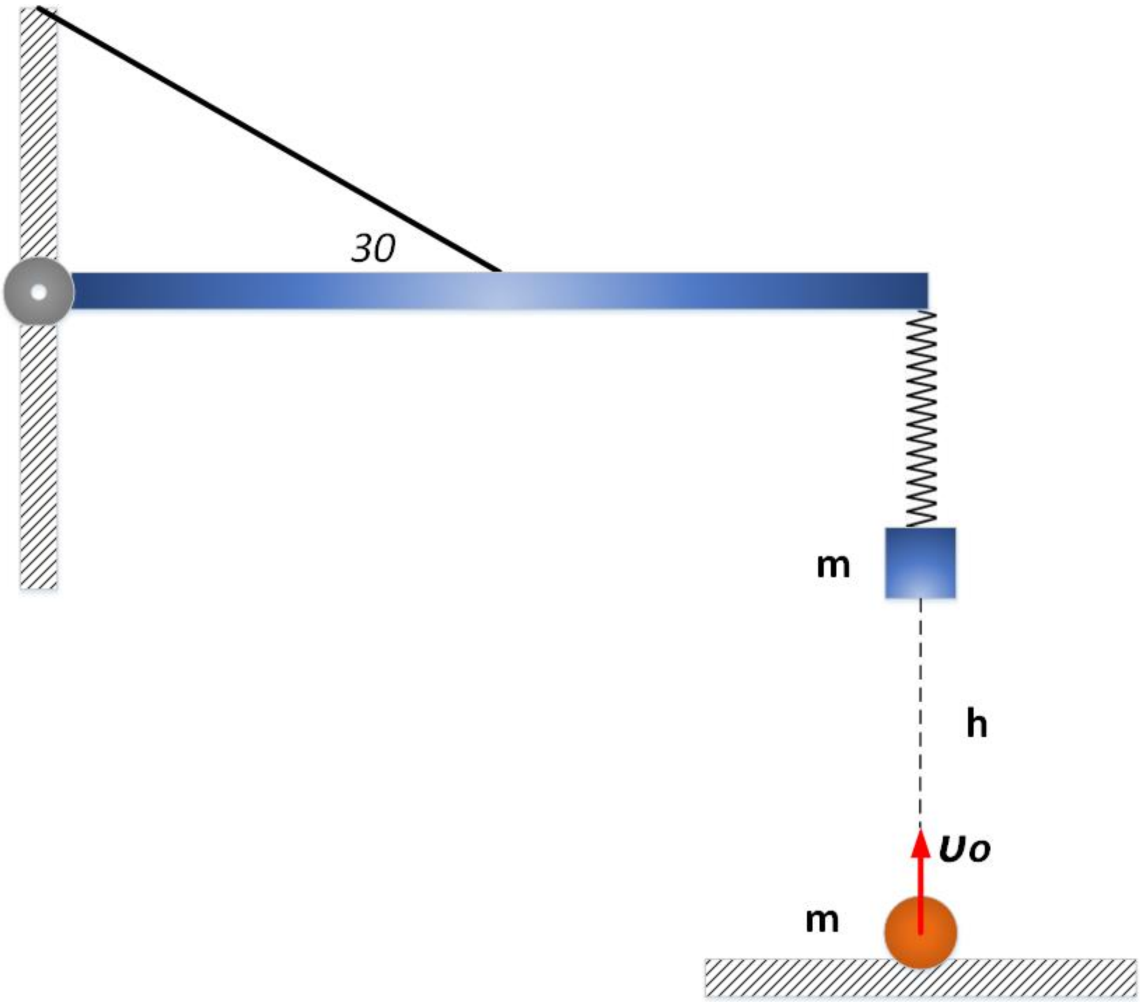
Άρα η οπή θα πρέπει να είναι σε ύψος $y = \dfrac{4H}{8} = \dfrac{H}{2} = 1m$

** Παρατήρηση : Θα μπορούσαμε να βρούμε το ύψος για την μεγιστοποίηση του βεληνεκούς μηδενίζοντας την 1η παράγωγο της συνάρτησης* $S(y)$

Θέμα Δ

Μια ομογενής ράβδος μάζας $M = 5kg$ μήκους $L = 1m$ είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της και με την βοήθεια ενός αβαρούς μη εκτατού νήματος που είναι δεμένο στο κέντρο της, ισορροπεί οριζόντια, με το νήμα να σχηματίζει γωνία 30^o με την ράβδο.

Στο ελεύθερο άκρο της ράβδου έχουμε αναρτήσει ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k που στο κάτω άκρο του ισορροπεί ακλόνητο ένα σώμα μάζας $m = 1kg$.



Δ.1 Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα και η δύναμη που δέχεται η άρθρωση από την ράβδο.

Για την ισορροπία του σώματος:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg = 10N$$

Για την ράβδο:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T\eta\mu 30\frac{L}{2} - Mg\frac{L}{2} - F'_{\varepsilon\lambda}L = 0 \Rightarrow T = 140N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu 30 = F_{\alpha\rho\theta x} = 70\sqrt{3}N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{αρθ}y} + T\eta\mu 30 = Mg + F'_{\text{ελ}} \Rightarrow F_{\text{αρθ}y} = -10N$$

** Άρα η κάθετη συνιστώσα της δύναμης από την άρθρωση έχει φορά προς τα κάτω.*

$$F_{\text{αρθ}} = \sqrt{F^2_{\text{αρθ}x} + F^2_{\text{αρθ}y}} = \sqrt{14800} = 122N$$

** Επειδή το ελατήριο είναι ιδανικό $F_{\varepsilon\lambda} = -F'_{\varepsilon\lambda}$*

Η δύναμη από την άρθρωση, σχηματίζει γωνία θ με την ράβδο για την οποία ισχύει:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F_{\text{αρθ}y}}{F_{\text{αρθ}x}} = \frac{1}{7\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{21}$$

Στο έδαφος και στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου βρίσκεται δεύτερο σώμα μάζας m το οποίο εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $v_o = 5m/s$ και την χρονική στιγμή $t_o = 0$ σφηνώνεται στο αναρτημένο στο ελατήριο σώμα.

Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται σταματά στιγμιαία την χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{\pi}{15}s$, όταν φτάσει στην θέση που μηδενίζεται η δύναμη παραμόρφωσης του ελατηρίου.

Δ.2 Να αποδείξετε ότι η κίνηση του συσσωματώματος θα είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την σταθερά επαναφοράς της.

Στην θέση ισορροπίας πριν την κρούση το ελατήριο είναι επιμηκυσμένο κατά $\Delta l_o = \dfrac{mg}{k}$

Στην θέση ισορροπίας της ταλαντωσης:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = mg \Rightarrow k\Delta l = 2mg \Rightarrow \Delta l = 2\Delta l_o$$

Σε μια τυχαία θέση που βρίσκεται y κάτω από την θέση ισορροπίας

$$\Sigma F = 2mg - k\left(\Delta l + y\right) \Rightarrow \Sigma F = -ky$$

Άρα $D = k$

* *Η θέση πριν την κρούση βρίσκεται $y_1 = \Delta l_o$ πάνω από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Η θέση φυσικού μήκους είναι και η ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με* $A = \Delta l = 2\Delta l_o$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης από την ΘΙΤ θα είναι:

$$y = A\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right)$$

Την $t_o = 0$ έχουμε $y = \dfrac{A}{2}$ και $\upsilon > 0$

$$\frac{A}{2} = A\eta\mu\phi_o \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \frac{5\pi}{6}$$

$$\upsilon > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{6}$$

Την t_1 το συσσωμάτωμα φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία θέση:

$$A = A\eta\mu\left(\omega\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \omega\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 5rad/s$$

* *είναι προφανές ότι η αρχική φάση και η ω μπορούν να υπολογιστούν και με την αναπαράσταση του στρεφόμενου διανύσματος.*

Η σταθερά επαναφοράς θα είναι: $D = k = 2m\omega^2 = 50N/m$ και το πλάτος ταλάντωσης $A = 0,4m$

Δ.3 Να βρεθεί η αρχική απόσταση h ανάμεσα στα δύο σώματα.

Για να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος αρκεί να βρω την ταχύτητα την $t = 0$

$$\upsilon_k = \omega A \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} m/s$$

Εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κρούση, με δεδομένο ότι η ταχύτητα του δεύτερου σώματος πριν την κρούση είναι υ:

$$m\upsilon = 2m\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon = 2\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{3} m/s$$

Για την άνοδο του σώματος πριν την κρούση εφαρμόζω το ΘΜΚΕ

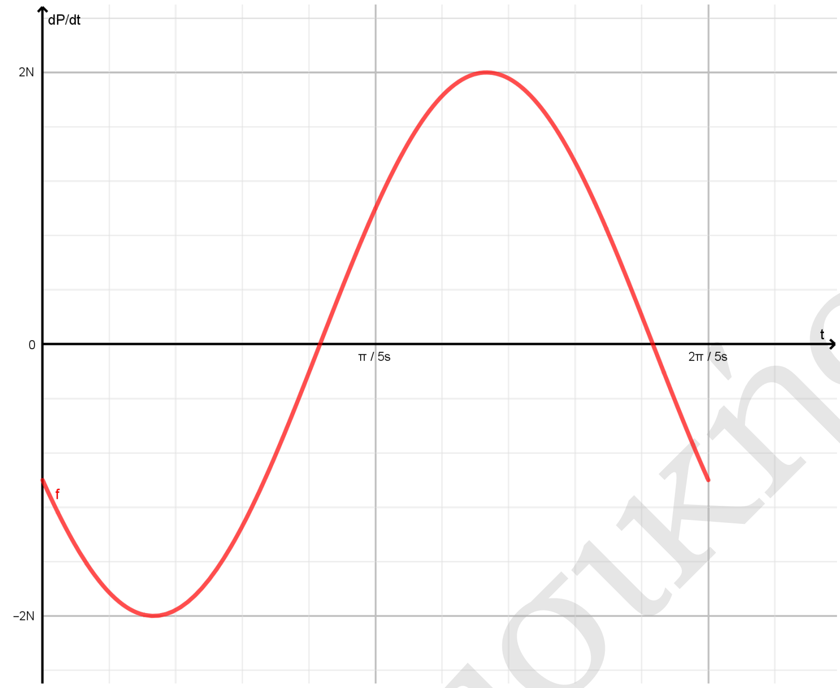
$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -mgh \Rightarrow h = 0,65m$$

Δ.4 Να γράψετε την χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος θεωρώντας ως θετική την φορά της ταχύτητας μετά την κρούση. Να γίνει σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες το αντίστοιχο διάγραμμα

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dy = -2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \ (SI)$$

Δ.5 Να γράψετε την αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας του και να σχεδιάσετε το διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες. Να βρεθεί το όριο θραύσης του νήματος αν σας είναι γνωστό ότι το νήμα οριακά δεν θα σπάσει κατά την ταλάντωση του συσσωματώματος.

Υπολογίζω την δύναμη του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας



$$\Sigma F = -Dy \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - 2mg = -ky \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20 - 50y$$

Από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου θα προκύψει:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow ....T = 180 - 200y\,(SI),\ \ -0,4m \leq y \leq 0,4m$$

Αφού η μέγιστη τιμή της τάσης είναι $T = 260N$ *και με δεδομένο ότι δεν σπάει οριακά, αυτή θα είναι και η τιμή του ορίου θραύσης.*


T
f
200N
100N
x
−0.4m
0
0.4m