**Διαγώνισμα** *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

# 2ο Επαναληπτικό (Απρίλης 2019)

Ενδεικτικές Λύσεις

# Θέμα Α

**Α.1.** Όταν μια μικρή σφαίρα προσπίπτει πλάγια σε λείο κατακόρυφο τοίχο και συγκρούεται με αυτόν ελαστικά, τότε η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη σφαίρα έχει διεύθυνση:

**(δ)** κάθετη στον τοίχο.

**Α.2.** Σε ένα ποταμό σταθερού πλάτους και μεταβλητού βάθους ρέει νερό.

**(γ)** στα ρηχά τμήματα του ποταμού η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη σε σχέση με τα βαθύτερα τμήματα.

**Α.3.** Ένα σώμα μάζας $m$ αναρτάται στο κάτω μέρος ελατηρίου σταθεράς $k$ και με την επίδραση μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, με το μέγιστο δυνατό πλάτος. Αντικαθιστούμε το σώμα με ένα άλλο διπλάσιας μάζας, χωρίς να αλλάξουμε την εξωτερική περιοδική δύναμη. Για την νέα ταλάντωση σε σχέση με την αρχική:

**(δ)** η περίοδος θα παραμένει σταθερή και το πλάτος ταλάντωσης θα μειώθεί.

**Α.4.** Ένα νόμισμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o$ και αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_o$. Αν η αντίσταση του αέρα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα τότε, όταν το νόμισμα φτάσει στο ανώτερο σημείο:

**(δ)** θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ίση με την αρχική.

**Α.5.**

**(α)** Η εξίσωση Bernoulli είναι συνέπεια της Αρχής Διατήρησης Ενέργειας για την ροή ενός ιδανικού ρευστού και έχει την ίδια μορφή τόσο για τα ιδανικά, όσο και για τα νευτώνεια ρευστά. **Λάθος**

**(β)** Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης. Η περίοδος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο. **Λάθος**

**(γ)** Το Φαινόμενο Doppler οφείλεται στην σχετική κίνηση ανάμεσα στην πηγή και τον παρατηρητή. **Σωστό**

**(δ)** Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι ανάλογη της συχνότητας ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου. **Λάθος**

**(ε)** Ο συντελεστής ιξώδους για ένα πραγματικό ρευστό είναι καθαρός αριθμός. **Λάθος**

# Θέμα Β

**Β.1.** Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις παραπλήσιων συχνοτήτων με εξισώσεις $x_1 = A\eta\mu(\omega_1 t)$ και $x_2 = A\eta\mu(\omega_2 t)$. Σε μια χρονική στιγμή που το πλάτος ταλάντωσης του σώματος είναι ίσο με A η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων μπορεί να είναι ίση με:

**(γ)** $\dfrac{2\pi}{3}$

*Η διαφορά φάσης των επιμέρους ταλαντώσεων είναι:* $\phi = \omega_1 t - \omega_2 t$
*Για την σύνθετη ταλάντωση προκύπτει ότι:*

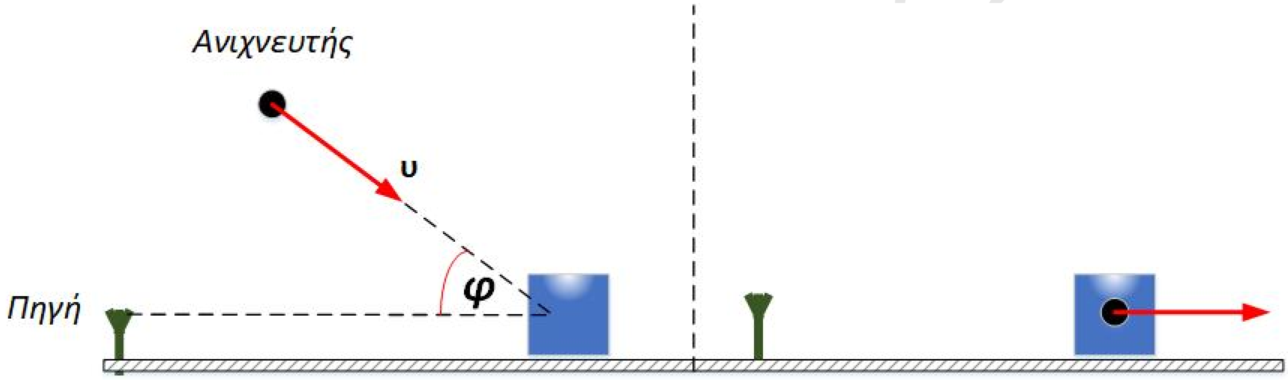
$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

*Η ταλάντωση έχει πλάτος A όταν:*

$$A = \left| 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right| \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

** επέλεξα απευθείας την απάντηση, αφού καμία άλλη από τις προτεινόμενες δεν ικανοποιεί την τριγωνομετρική εξίσωση.*

**B.2.** Ένας ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων με μάζα $m$ βάλετε με ταχύτητα μέτρου $\upsilon$, υπό γωνία προς ένα ακίνητο κιβώτιο μάζας $4m$ . Μια ακίνητη πηγή παράγει ηχητικά κύματα συχνότητας $f$ που διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon_{\eta\chi}$. Η πηγή βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κιβωτίου και ο ανιχνευτής θα σφηνωθεί μετά την κρούση στο σημείο αυτό. Η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής μετά την κρούση διαφέρει κατά $\dfrac{f}{20}$ από την συχνότητα που η πηγή παράγει. Αν σας δίνεται η γωνία $\phi = 60^o$ που σχηματίζει η ταχύτητα πριν την κρούση με το οριζόντιο επίπεδο, τότε για την ταχύτητα του ανιχνευτή πριν την κρούση θα ισχύει:




**(α)** $\upsilon = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi}}{2}$

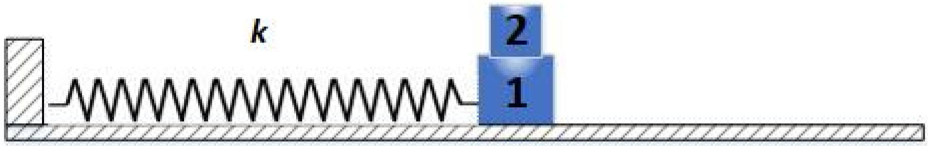
*Εφαρμόζω για την κρούση την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα.*

$$m\upsilon\sigma\upsilon\nu\phi = 5m\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\upsilon}{10}$$

*Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο ανιχνευτής μετά την κρούση θα είναι μικρότερη από την συχνότητα που η πηγή εκπέμπει, αφού θα απομακρύνεται από αυτή:*

$$f' = f - \frac{f}{20} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_k}{\upsilon_{\eta\chi}} f \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{20} \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{2}$$

**Β.3.** Σώμα μάζας $m_1$ στερεώνεται στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k$ που έχει το άλλο άκρο του ακλόνητα στερεωμένο και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο σώμα τοποθετούμε δεύτερο σώμα μάζας $m_2$ και ανάμεσα στα σώματα εμφανίζεται συντελεστής στατικής τριβής $\mu_s$. Εκτοξεύω το σύστημα των σωμάτων από την παραπάνω θέση με ταχύτητα




$\upsilon_o$, τέτοια ώστε σε όλη την διάρκεια της περιοδικής τους κίνησης μόλις μου να μην χάνουν επαφή μεταξύ τους. Για την ταχύτητα εκτόξευσης ισχύει:

**(β)** $\upsilon_o = \mu_s g\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{k}}$

*Στο πάνω σώμα η στατική τριβή θα έχει σε κάθε χρονική στιγμή τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς, αφού είναι η μόνη δύναμη που δέχεται το σώμα στον άξονα της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων.*

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow T_s = D_2 x = m_2\omega^2 x$$

*Για το σύστημα των δύο σωμάτων:*

$$D = k = (m_1+m_2)\omega^2$$

*Το σώμα δεν ολισθαίνει όταν:*

$$T_s \le \mu_s N \Rightarrow m_2\omega^2 x \le \mu_s m_2 g \Rightarrow x \le \frac{\mu_s g}{\omega^2}$$

*Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης για να μην ολισθαίνει το σώμα 2 πρέπει να είναι:* $A = \dfrac{\mu_s g}{\omega^2}$

*Η ταχύτητα εκτόξευσης θα είναι και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης αφού είναι η ταχύτητα στην θέση ισορροπίας.*

$$\upsilon_o = \omega A = \omega\frac{\mu_s g}{\omega^2} = \frac{\mu_s g}{\omega} = \ldots$$

# Θέμα Γ

Στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούνται εγκάρσια επιφανειακά κύματα από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $\Pi_1$ και $\Pi_2$, που βρίσκονται στα σημεία Α και Β. Η απόσταση ΑΒ είναι $8m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 2m$. Το πλάτος ταλάντωσης του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων είναι $2cm$ και η συχνότητα της ταλάντωσης του είναι $0,5Hz$.

Ένα μικρό κομμάτι φελλού, μάζας $m = 0,01kg$, βρίσκεται σε σημείο $P$ της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, σε αποστάσεις $r_1 = 6m$ και $r_2$ από τις πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$ αντίστοιχα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κάθετα στην επιφάνεια του υγρού.

*Από τα δεδομένα θα προκύψουν:*

- $2A = 2cm \Rightarrow A = 1cm$
- $\upsilon_\delta = \lambda f = 1m/s$
- Για το τρίγωνο $APB$ έχουμε: $r_2^2 = r_1^2 + d^2 \Rightarrow r_2 = 10m$

**Γ.1** Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης του φελλού μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

*Το πλάτος ταλάντωσης μετά την συμβολή θα είναι:*

$$A' = 2A \mid \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) \mid = 2cm$$

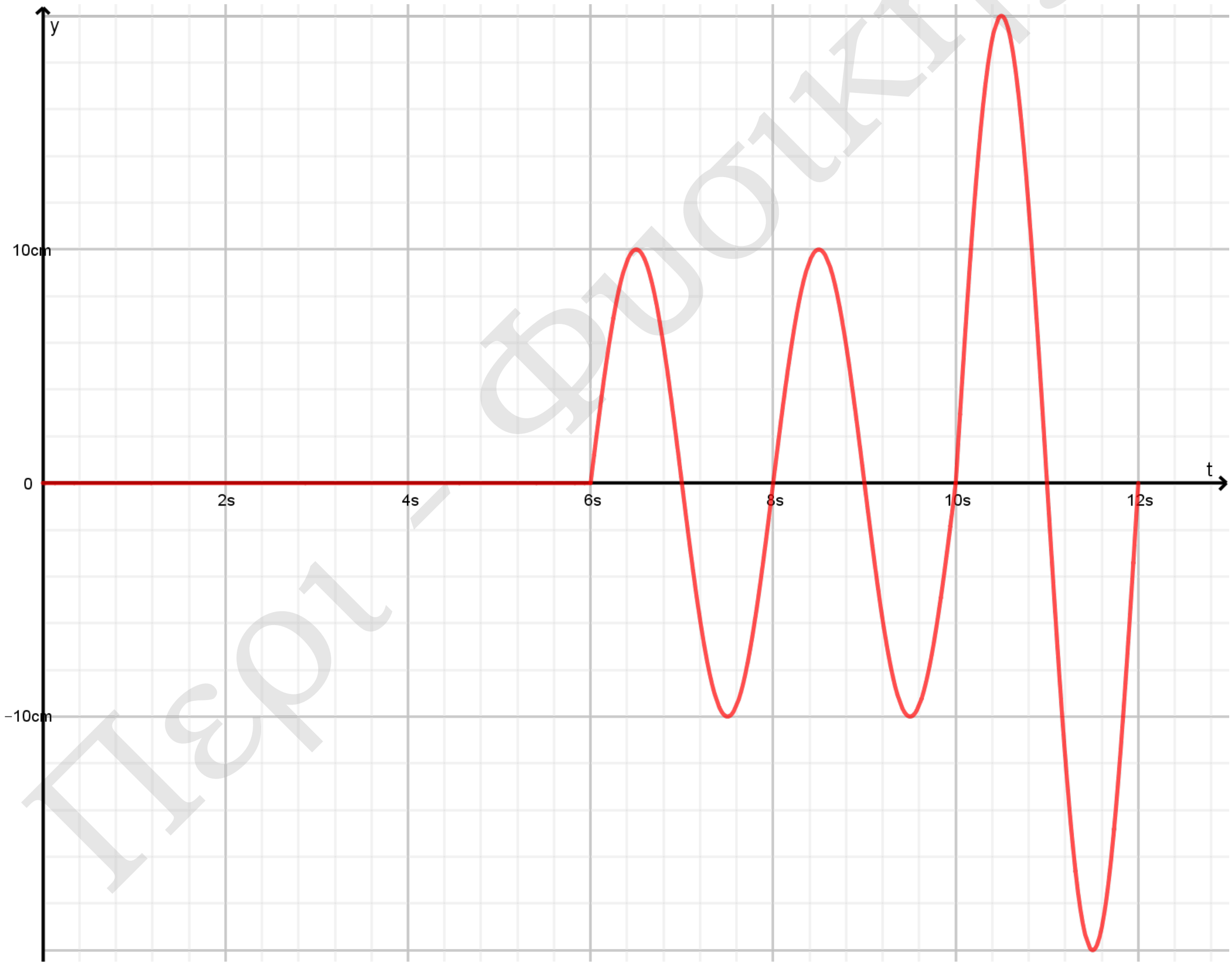
*Άρα η ενέργεια ταλάντωσης είναι:*

$$E = \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A'^2 = 2 \cdot 10^{-5} J$$

**Γ.2** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 12s$.

*Το πρώτο κύμα φτάνει την στιγμή* $\frac{r_1}{\upsilon_\delta} = 6s$ *και το δεύτερο κύμα φτάνει την στιγμή* $\frac{r_2}{\upsilon_\delta} = 10s$. *Η απόμάκρυνση από την θέση ισορροπίας στο* $S.I$ *θα είναι:*

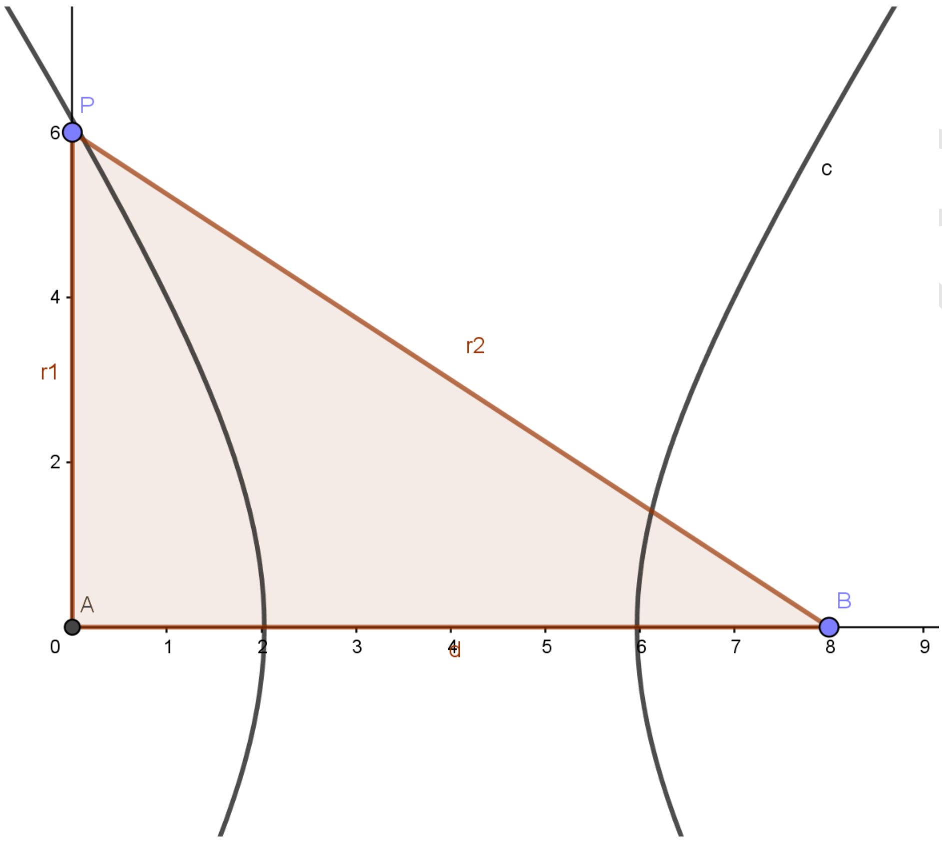
- $y = 0 \quad 0 < t < 6s$
- $y = 0,01\eta\mu\left(\pi t - 6\pi\right) \quad 6s \leq t < 10s$
- $y = 0,02\eta\mu\left(\pi t - 8\pi\right) \quad t \geq 10s$




**Γ.3** Να υπολογίσετε την ταχύτητα του φελλού τη χρονική στιγμή $t_2 = 20s$.

$$\upsilon = \pi \cdot 0,02\sigma\upsilon\nu\left(\pi \cdot 20 - 8\pi\right) = 0,02\pi m/s$$

**Γ.4** Να βρείτε σε πόσα σημεία μεταξύ του Α και του $P$ αν τοποθετήσουμε τον φελλό θα αποκτήσει την ίδια ενέργεια ταλάντωσης με αυτή που είχε στο $P$.




*Η υπερβολή ενίσχυσης ($r_2 - r_1 = 4 = 2\lambda$)στην οποία ανήκει το σημείο $P$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB στο σημείο Δ. Για το σημείο αυτό ισχύει ότι:*

$$r_2' - r_1' = 4 \qquad r_2' + r_1' = d = 8$$

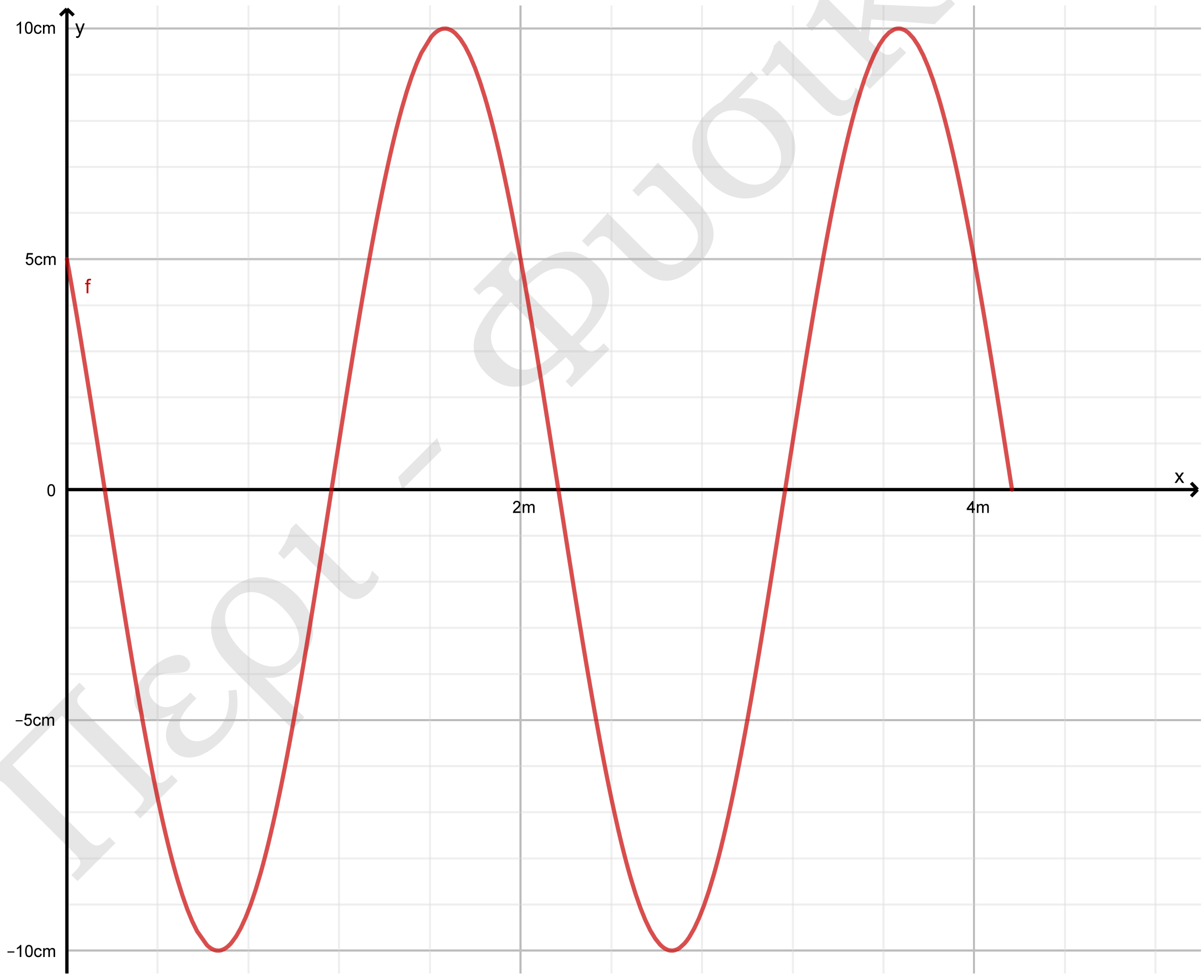
*Άρα το Δ απέχει $r_2' = 6m$ από την $\Pi_2$. Τα σημεία ενισχυτικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $AP$ θα βρίσκονται πάνω στις υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται ανάμεσα στο σημείο Δ και την $\Pi_1$. Για αυτές τι υπερβολές και τα σημεία στα οποία τέμνουν το AB θα ισχύει:*

$$r_2'' - r_1'' = N\lambda \qquad r_2'' + r_1'' = d \quad r_2' < r_2'' < d$$

*Από τα παραπάνω προκύπτει* $2 < N < 4 \Rightarrow N = 3$. *Οπότε υπάρχει μόνο ένα σημείο.*

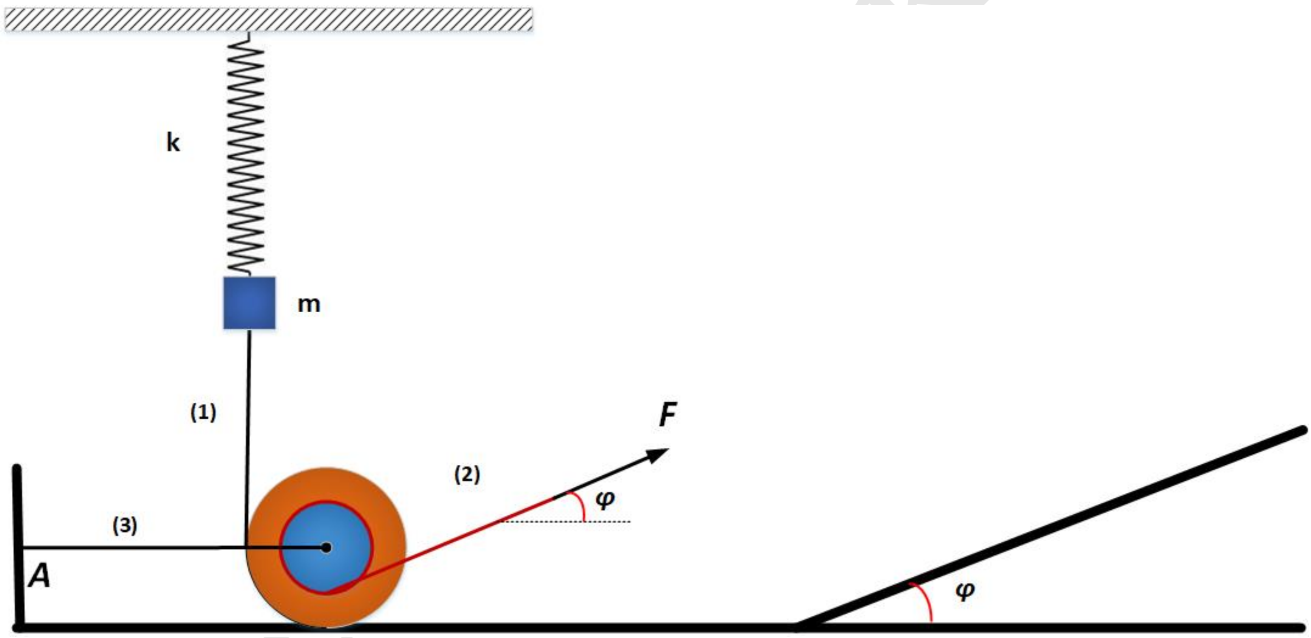
**Γ.5** Να κατασκευάσετε το στιγμιότυπο του κύματος που παράγει η $\Pi_1$ πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α,Β την χρονική στιγμή που η φάση ταλάντωσης της είναι $\frac{25\pi}{6} rad$

*Το σημείο Α έχει ταλαντωθεί για χρόνο* $\Delta t$ *στον οποίο* $\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{25\pi}{6} \Rightarrow$ $\Delta t = 2T + \frac{T}{12}$,*άρα το στιγμιότυπο θα είναι:*



# Θέμα Δ

Ένας δίσκος μάζας $M = 12kg$ και ακτίνας $R = 0,5m$ φέρει εγκοπή ακτίνας $r = \frac{R}{2}$. Στην περιφέρεια του δίσκου έχουμε τυλίξει νήμα (1) το οποίο καταλήγει στο κάτω μέρος σώματος μάζας $m = 1kg$ το οποίο ισορροπεί αναρτημένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ,επιμηκυσμένου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$. Στην εγκοπή του δίσκου είναι τυλιγμένο πολλές φορές ένα δεύτερο νήμα (2), στο άκρο του οποίου ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ με σταθερή κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\phi$ με το οριζόντιο επίπεδο και έχει μέτρο $100N$.




Για να ισορροπεί όλο το σύστημα ένα τρίτο νήμα (3) που είναι στερεωμένο στο κέντρο του δίσκου έχει το άλλο άκρο του ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο A ενός τοίχου και δέχεται από αυτόν δύναμη μέτρου $70N$. Σας είναι γνωστό ότι όλα τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά και η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου είναι ίση με $0,5m$.

**Δ.1** Να βρεθεί η γωνία $\phi$ ($\eta\mu\phi, \sigma\upsilon\nu\phi$) καθώς και το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο.

*Εφαρμόζω τις συνθήκες ισορροπίας στο σώμα και στον δίσκο, αφού σχεδιάσω όλες τις δυνάμεις. Το σώμα δέχεται πέρα από το βάρος του, την τάση του* *νήματος (1) και την δύναμη του ελατηρίου. Ο δίσκος δέχεται τις τάσεις από τα τρία νήματα και την στατική τριβή που έχει φορά προς τα αριστερά.*

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg + T_1 \Rightarrow k\Delta l = T_1 + mg \Rightarrow T_1 = 40N$$

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1'R + T_sR = F\frac{R}{2} \Rightarrow T_s = 10N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_3 + T_s \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\phi = 80N \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = 0,8$$

*$\eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\phi = 1 \Rightarrow \eta\mu\phi = 0,6$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + T_1' + F_y = Mg \Rightarrow N = Mg - T_1' - F\eta\mu\phi = 20N$$

** Έλαβα υπόψη ότι τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά, άρα οι δυνάμεις που ασκούν στα δύο άκρα τους είναι ίσες.*

*Η δύναμη που δέχεται από το δάπεδο ο δίσκος είναι η συνισταμένη της κάθετης αντίδρασης $N$ και της στατικής τριβής $T_s$*

$$F_\delta = \sqrt{N^2 + T_s^2} = 10\sqrt{5}N$$

Κάποια στιγμή που θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t_o = 0$ κόβουμε ακαριαία τα νήματα (1) και (3), οπότε ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κινούμενος στο οριζόντιο επίπεδο και το σώμα ταλαντώνεται αρμονικά. Την χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ ο δίσκος εισέρχεται χωρίς να χάνει ενέργεια σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi$, χωρίς να μεταβάλλεται η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$.

**Δ.2** Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα κατά την διάρκεια της κίνησης του σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα πάνω.

*Αφού κοπεί το νήμα η νέα θέση ισορροπίας του σώματος θα είναι και η ΘΙΤ.*

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_o = mg \Rightarrow \Delta l_o = 0,1m$$

*Η αρχική θέση την στιγμή που κόβεται το νήμα είναι ακραία θέση αφού το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:* $A = \Delta l - \Delta l_o = 0,4m$. *η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης θα δίνεται :* $D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s$.

*Την* $t_o = 0$ *το σώμα βρίσκεται σε ακραία αρνητική θέση άρα για την αρχική φάση έχουμε:*

$$y = -A = A\eta\mu\left(\omega \cdot 0 + \phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = -1 \Rightarrow \phi_o = \frac{3\pi}{2}$$

*Η δύναμη επαναφοράς στο* $(S.I.)$ *θα είναι:*

$$\Sigma F = -Dy = -40\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

**Δ.3** Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου κατά την κίνηση του στο οριζόντιο επίπεδο.

*Ο δίσκος θα κινείται προς τα δεξιά και θα περιστρέφεται στην φορά των δεικτών του ρολογιού, ώστε να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει (η ταχύτητα του σημειου επαφής με το έδαφος* $\upsilon_{cm} - \omega R = 0$.

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\phi - T_s = M\alpha_{cm} \qquad (1)$$

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_s R - F\frac{R}{2} = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (2)$$

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\text{γων}} R \tag{3}$$

*Από το σύστημα (1) , (2) , (3) προκύπτει η επιτάχυνση:*

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{3} m/s^2$$

**Δ.4** Να βρεθεί το έργο της $\vec{F}$ κατά την κίνηση του δίσκου από την χρονική στιγμή $t_o = 0$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_1 = 3s$. Την ίδια χρονική στιγμή να βρεθεί η Κινητική Ενέργεια του δίσκου.

*Την $t_1$ ο δίσκος έχει μετατοπιστεί κατά $x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t_1^2 = 7,5m$. Αφού κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει $x_{cm} = R\theta$*

$$W_F = W_{\text{μετ}} + W_{\text{περ}} = F_x \cdot x_{cm} - F\frac{R}{2}\theta = 225J$$

*Η κινητική ενέργεια του δίσκου την ίδια στιγμή θα είναι ίση με:*

$$\Delta K = \Sigma W = W_F = 225J$$

** Χρησιμοποίησα το ΘΜΚΕ και ότι το έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν αφού το σημείο στο οποίο ασκείται έχει ταχύτητα μηδέν.*

**Δ.5** Την στιγμή που εισέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο ακαριαία μειώνεται το μέτρο της δύναμης $F$ έτσι ώστε το κέντρο μάζας να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο η νέα δύναμη παρέχει ενέργεια στον δίσκο την $t_2 = 3,5s$. *Κατά την είσοδο στο κεκλιμένο ο δίσκος έχει ταχύτητες: $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t_1 = 5m/s$ και $\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = 10rad/s$.*

*Αφού το κεκλιμένο είναι λείο μηδενίζεται η στατική τριβή και με δεδομένο ότι το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα:*

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F' = w_x = Mg\eta\mu\phi \Rightarrow F' = 72J.$$

*Περιστροφικά ο δίσκος θα επιβραδύνεται εξαιτίας της ροπής της $F'$*

$$\Sigma\tau = I\alpha'_{\text{γων}} \Rightarrow F'\frac{R}{2} = \frac{1}{2}MR^2\alpha'_{\text{γων}} \Rightarrow \alpha'_{\text{γων}} = 12rad/s^2$$

*Την χρονική στιγμή $t_2$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας δεν θα έχει μεταβληθεί, ενώ η γωνιακή ταχύτητα θα είναι ίση με $\omega_2 = \omega - \alpha'_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1) = 4rad/s$.*

*Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:*

$$\frac{dW_F}{dt} = F \cdot \upsilon = F \cdot (\upsilon_{cm} - \omega r) = 288J/s$$

** όπου $\upsilon$ η ταχύτητα του σημείου του νήματος που ασκείται η δύναμη. Η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου επαφής νήματος - εγκοπής, αφού το νήμα δεν ολισθαίνει σε αυτή.*

*Είναι προφανές ότι απαιτούνται σχήματα για την λύση των θεμάτων. Στις ενδεικτικές λύσεις τα σχήματα δεν δίνονται λόγο περιορισμένου χρόνου.*

***Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός***