
Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου

Κύματα - Φαινόμενο Doppler

Ενδεικτικές Λύσεις
Κυριακή 4 Νοέμβρη 2018

Θέμα Α

A.1. Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, χωρίς ενεργειακές απώλειες. Καθώς το κύμα απομακρύνεται από την πηγή του :

(γ) η φάση ταλάντωσης των σημείων της χορδής μειώνεται.

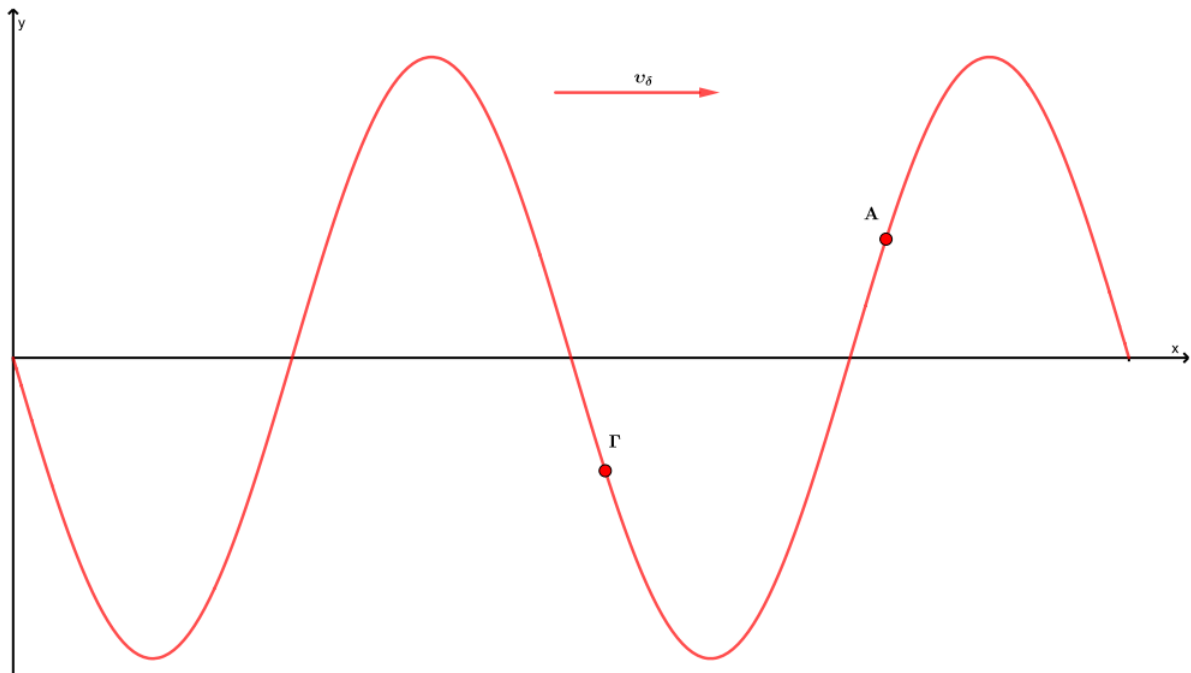
A.2. Σε χορδή που έχει το ένα άκρο της ακλόνητα στερεωμένο θέτουμε σε ταλάντωση το ελεύθερο άκρο της με κατάλληλο μηχανισμό. Πάνω στην χορδή, διακρίνονται συνολικά μετά από λίγο τρία σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα, ενώ το ελεύθερο άκρο ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος Ένα υλικό σημείο που απέχει οριζόντια απόσταση $\frac{7\lambda}{8}$ από το ελεύθερο άκρο, θα εμφανίζει με αυτό διαφορά φάσης :

(α) π

(γ) μηδέν

A.3. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Στο παρακάτω στιγμιότυπο διακρίνονται δύο σημεία Α και Γ του ελαστικού μέσου τα οποία :

(β) κινούνται και τα δύο προς την θέση ισορροπίας τους.



A.4. Συρμός του μετρό κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα πλησιάζοντας τον επόμενο σταθμό του. Ο μηχανοδηγός μέσω της κόρνας δημιουργεί αρμονικό ήχο συχνότητας f και μήκους κύματος λ για όση ώρα κινείται. Ένας επιβάτης που βρίσκεται στο τελευταίο βαγόνι του συρμού και κάθετα στην θέση του, αντιλαμβάνεται τον παραπάνω ήχο με συχνότητα f' και μήκος κύματος λ' για τα οποία ισχύει:

(δ) $f' = f$ και $\lambda' > \lambda$

A.5.

(α) Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου και την συχνότητα της πηγής του κύματος. **Λάθος**

(β) Κατά την συμβολή δύο κυμάτων που δημιουργούνται από σύγχρονες πηγές, στην επιφάνεια ενός υγρού, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου θα ταλαντώνονται με πλάτος διπλάσιο από το πλάτος των πηγών. **Λάθος**

(γ) Σε ένα στάσιμο κύμα όλα τα σημεία του μέσου τα οποία ταλαντώνονται φτάνουν ταυτόχρονα σε θέσεις μέγιστης απομάκρυνσης. **Σωστό**

- (δ)** Το Φαινόμενο Doppler μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αστρονομία για τον υπολογισμό ταχυτήτων των άστρων σε σχέση με την Γη. **Σωστό**
- (ε)** Όταν ένας παρατηρητής πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα μια ακίνητη ηχητική πηγή, η συχνότητα του ήχου που ακούει είναι συνεχώς μεγαλύτερη από τη συχνότητα που παράγει η πηγή. **Σωστό**

Θέμα Β

B.1. Μια πηγή ηχητικών κυμάτων παράγει αρμονικό ήχο συχνότητας f_1 και μήκους κύματος λ_1 . Ένας ανιχνευτής ήχων καταγράφει για τον παραπάνω ήχο συχνότητα $f_2 = 2f_1$ και μήκος κύματος $\lambda_2 = 0,8\lambda_1$. Αν σας είναι γνωστό ότι η πηγή κινείται με ταχύτητα \vec{v}_1 και ο παρατηρητής με ταχύτητα \vec{v}_2 τότε για τις ταχύτητες θα ισχύει ότι:

$$(\gamma) \vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$$

Αφού $f_2 > f_1$ τα δύο σώματα θα πλησιάζουν μεταξύ τους και αφού $\lambda_2 < \lambda_1$ η πηγή πλησιάζει προς τον παρατηρητή.

$$\lambda_2 = 0,8\lambda_1 = \lambda_1 - v_1 T \Rightarrow v_1 = 0,2\lambda_1 f_1 = 0,2v_{\eta\chi}$$

$$f_2 = \frac{v_{\eta\chi} + v_2}{v_{\eta\chi} - v_1} f_1 = 2f_1 \dots \Rightarrow v_2 = 0,6v_{\eta\chi}$$

B.2. Πάνω στην επιφάνεια ενός ήρεμου υγρού τοποθετούνται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων που έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης. Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού ξεκινά να ταλαντώνεται την στιγμή t_1 που η φάση ταλάντωσης κάθε πηγής ισούται με 2π και διπλασιάζει το πλάτος ταλάντωσης του την στιγμή t_2 όταν έχει ολοκληρώσει 3 πλήρεις ταλαντώσεις.

Ένα δεύτερο σημείο Μ που βρίσκεται στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές ξεκινά να ταλαντώνεται την στιγμή t_1 . Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων που εκτελούν τα παραπάνω σημεία μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτά θα είναι:

(β) 2π

Όταν η φάση ταλάντωσης κάθε πηγής έχει γίνει 2π σημαίνει ότι έχει περάσει χρόνος T , άρα $t_1 = T \Rightarrow r_1 = \lambda$. Επίσης $t_2 = t_1 + 3T \Rightarrow r_2 = r_1 + 3\lambda$

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Σ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό θα είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right)\eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y = -2A\eta\mu(\omega t - 5\pi)$$

$$\Rightarrow \phi = \omega t - 5\pi + \pi = \omega t - 4\pi$$

Για το σημείο M που βρίσκεται στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ισχύει ότι $r'_1 = r'_2 = \lambda$ (το σημείο M ξεκινά να ταλαντώνεται ταυτόχρονα με το Σ , άρα $r'_1 = r_1$)

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r'_2 - r'_1}{2\lambda}\right)\eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{r'_1 + r'_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y = 2A\eta\mu(\omega t - 2\pi)$$

$$\Rightarrow \phi' = \omega t - 2\pi$$

Άρα η διαφορά φάσης είναι 2π .

B.3 Πάνω σε χορδή μεγάλου μήκους που ταυτίζεται με τον $x'Ox$ διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κύματα που έχουν το ίδιο πλάτος A , ίδια συχνότητα f και αντίθετες ταχύτητες διάδοσης. Το υλικό σημείο $O(x = 0)$ θα εκτελεί ταλάντωση πλάτους $2A$ ξεκινώντας από την θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα πάνω. Ένα υλικό σημείο Z της χορδής, που βρίσκεται ανάμεσα στον πρώτο δεσμό και την πρώτη κοιλία του θετικού ημιιάξονα, διέρχεται από την θέση ισορροπίας του με ταχύτητα μέτρου $2\pi f A$. Αν λ το μήκος κύματος, τότε η απόσταση OZ θα είναι ίση με:

$$(a) \frac{\lambda}{3}$$

$$A' = 2A \mid \sigma\sigma\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \mid = 2A \Rightarrow \sigma\sigma\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \pm \frac{1}{2}$$

Λύνω την τριγωνομετρική εξίσωση με δεδομένο από την εκφώνηση ότι για το ζητούμενο σημείο ισχύει: $\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{2}$

$$x = \kappa\lambda \pm \frac{\lambda}{3} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\lambda \pm \frac{\lambda}{6}$$

Η μόνη δεκτή λύση είναι η $x = \frac{\lambda}{3}$

Θέμα Γ

Το άκρο $O(x = 0)$ μιας οριζόντιας ελαστικής χορδής μεγάλου μήκους η οποία ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα Ox ξεκινά την $t = 0$ να εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t)$ με αποτέλεσμα την διάδοση ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος κατά μήκος της χορδής. Η απόσταση ανάμεσα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του O ισούται με $0,4m$, ενώ η συχνότητα μεγιστοποίησης της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης ισούται με 10 Hz . Τέλος η οριζόντια απόσταση ανάμεσα σε ένα όρος και την μεθεπόμενη κοιλάδα ισούται με $3m$

Γ.1 Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

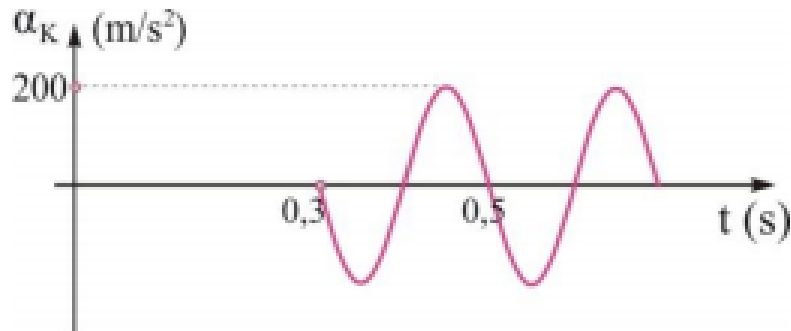
Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $2A = 0,4m$, $2f = 10\text{ Hz}$ και $\frac{3\lambda}{2} = 3m$

Άρα $v_\delta = \lambda f = 10m/s$

$$y = 0,2\eta\mu(10\pi t - \pi x) \quad (S.I.)$$

Γ.2 Για ένα σημείο $K(x = 3m)$ της χορδής, να γράψετε την χρονική εξίσωση επιτάχυνσης - χρόνου και να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα αριθμημένους άξονες.

$$a = -200\eta\mu(10\pi t - 3\pi) \quad t \geq 0, 3s \quad (S.I.)$$



- Γ.3** Δύο σημεία Μ και Ν απέχουν μεταξύ τους οριζόντια απόσταση $5m$. Αν σας είναι γνωστό ότι το Μ ξεκίνησε την ταλάντωση του πριν το Ν, να βρεθεί η φάση ταλάντωσης του σημείου Μ σε μια χρονική στιγμή που το Ν βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση για πρώτη φορά.

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = 2\pi f \frac{\Delta x}{v_{\delta}} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = 5\pi \Rightarrow \phi_M - \phi_N = 5\pi$$

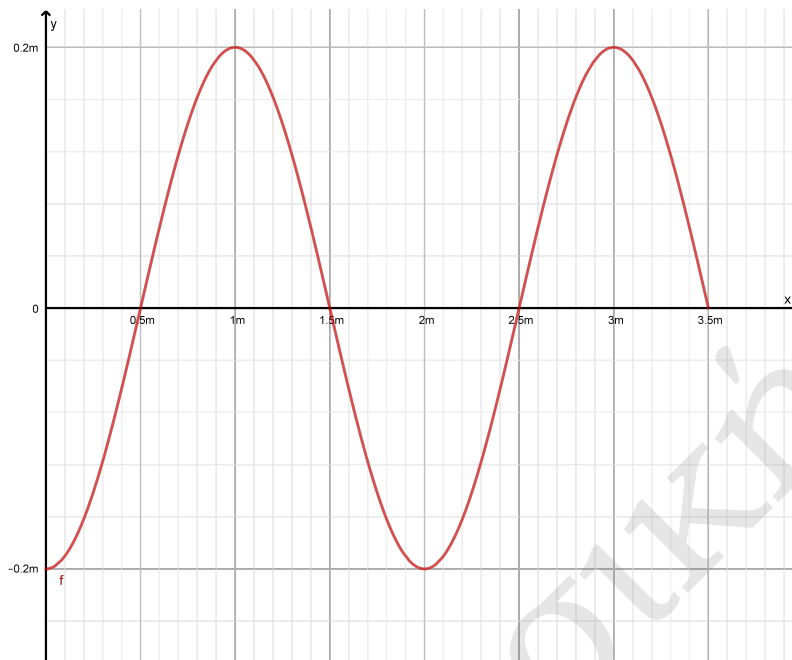
$$y_N = A\eta\mu\phi_N = A \Rightarrow \phi_N = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Άρα προκύπτει ότι: } \phi_M = 5\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{2} \text{ rad}$$

- Γ.4** Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος σε κατάλληλα αριθμημένους άξονες την χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Ο φτάνει για 4η φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης του.

Όταν το Ο φτάνει για 4η φορά σε ακραία θέση έχει περάσει χρόνος $T + \frac{3T}{4}$, οπότε το κύμα θα έχει προχωρήσει κατά $\lambda + \frac{3\lambda}{4}$

- Γ.5** Αν η μάζα του υλικού σημείου στην θέση Ο είναι $10^{-6}kg$ να βρείτε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του την στιγμή που η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του είναι $y = +\frac{A}{2}$



$$\frac{dU}{dt} = \frac{dK}{dt} = -\Sigma Fv = +Dyv$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ταλάντωσης:

$$E = K + U \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - y^2} = \pm \frac{\omega A \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dU}{dt} = m\omega^2 \frac{A}{2} \frac{A\omega\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3} \cdot 10^{-4} J/s$$

Θέμα Δ

Δύο πηγές εγκάρσιων κυμάτων Π_1 και Π_2 που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού, τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουν να εκτελούν ταυτόχρονα αρμονικές ταλαντώσεις που περιγράφονται από την ίδια εξίσωση,

$$y = 0,4\eta\mu(10\pi t) \quad (S.I.)$$

Για να φθάσει το κύμα της κάθε πηγής στην άλλη, χρειάζεται χρονικό διάστημα $0,7s$. Ένα σημείο της επιφάνειας του υγρού, Σ , που απέχει $4,5m$

από την πηγή Π_1 και $7,5m$ από τη πηγή Π_2 αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $0,45s$.

Δ.1 Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού και να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος που οι πηγές παράγουν.

$$v_{\delta} = \frac{r_1}{t_1} = \frac{4,5}{0,45} = 10m/s$$

$$\omega = 2\pi f = 10\pi \Rightarrow f = 5Hz$$

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow \lambda = 2m$$

$$y = 0,4\eta\mu(10\pi t - \pi r) \quad (S.I.)$$

Δ.2 Να βρείτε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται μεταξύ των δύο πηγών.

Για ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές (απόσταση ανάμεσα στις δύο πηγές $d = v_{\delta}\Delta t = 10 \cdot 0,7 = 7m$) ισχύει ότι:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad , \quad r_1 + r_2 = d \quad , \quad 0 < r_1 < d$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι: $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, άρα τα σημεία είναι 7.

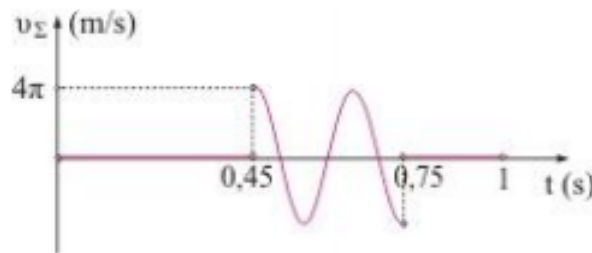
Δ.3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο σε αριθμημένους άξονες για το χρονικό διάστημα $0s \leq t \leq 1s$.

Το σημείο Σ είναι σημεία αποσβεστικής συμβολής γιατί:

$$r_2 - r_1 = 7,5 - 4,5 = 3m = \frac{3\lambda}{2}$$

Το δεύτερο κύμα φτάνει την στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} = 0,75s$. Άρα για $t \geq 0,75s$ το σημείο θα παραμένει ακίνητο. Οπότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης κατά την διάρκεια της ταλάντωσης θα είναι.

$$v = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 \leq t < 0,45; \\ 4\pi \sin(10\pi t - 4,5\pi) & \text{για } 0,45 \leq t < 0,75 \end{cases}$$



Δ.4 Να βρείτε την ελάχιστη αύξηση επί τοις % που πρέπει να προκαλέσουμε στη συχνότητα των πηγών, ώστε το σημείο Σ να αποκτήσει το μέγιστο δυνατό πλάτος μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό.

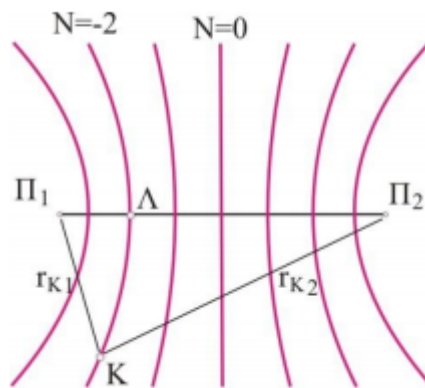
Για να έχουμε ενισχυτική συμβολή πρέπει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda' \Rightarrow r_1 - r_2 = N \frac{v_\delta}{f'} \Rightarrow f' = \frac{v_\delta}{r_1 - r_2} N = \frac{10}{3} N$$

Η συχνότητα που αντιστοιχεί στην ελάχιστη αύξηση είναι η $f' = \frac{20}{3} Hz$, οπότε το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\%$$

- Δ.5** Ένα σημείο K της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις d_1 και d_2 αντίστοιχα. Η υπερβολή που διέρχεται από το K τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές στο σημείο Λ που απέχει $1,5m$ από την Π_1 . Να βρείτε τις αποστάσεις d_1 και d_2 αν γνωρίζετε ότι το σημείο K μετά την συμβολή θα έχει εξίσωση ταλάντωσης $y = 0,8\eta\mu(10\pi t - 8\pi)$ (S.I.).



Από την εξίσωση ταλάντωσης του K προκύπτει:

$$2\pi \frac{d_2 + d_1}{2\lambda} = 8\pi \Rightarrow d_2 + d_1 = 8\lambda$$

Για το σημείο Λ ($r_1 = 1,5m$) ισχύει ότι $r_2 + r_1 = d \Rightarrow r_2 = 7 - 1,5 = 5,5m$, Άρα $r_1 - r_2 = -4 = -2\lambda$.

Τα σημεία K και Λ βρίσκονται πάνω στην ίδια υπερβολή ενίσχυσης, άρα και για το K ισχύει ότι $d_1 - d_2 = -2\lambda$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $d_1 = 6m$ και $d_2 = 10m$

Πηγή Γ,Δ: [study4exams.gr](http://www.study4exams.gr)