Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Κρούσεις

Σύνολο Σελίδων: Ενδεικτικές Λύσεις

Δευτέρα 3 Σεπτέμβρη 2018

Θέμα Α

Α.1. Ακίνητο πυροβόλο όπλο εκπυρσοκροτεί

(δ) Η ορμή του συστήματος σφαίρα - όπλο θα είναι ίση με μηδέν μετά την εκπυρσοκρότηση.

Α.2. Δύο σφαίρες Α και Β συγκρούονται ελαστικά. Η σφαίρα Β είναι αρχικά ακίνητη. Μετά την κρούση η σφαίρα Α κινείται σε κατεύθυνση ίδια με την αρχική κατεύθυνση της με ταχύτητα σχεδόν ίσου μέτρου με την αρχική ταχύτητα της, όταν :

(β) η σφαίρα Α έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από την σφαίρα Β,

Α.3. Μικρό ελαστικό σφαιρίδιο προσπίπτει σε μια επιφάνεια με ορμή μέτρου P, η οποία σχηματίζει γωνία $\phi = 60^o$ με την κάθετο στην επιφάνεια.Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου εξαιτίας της κρούσης με την επιφάνεια θα είναι:

(β) P

Α.4. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu(\omega t)$, τότε η τιμή της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

(γ) $F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t)$

Α.5.

(α) Για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η φάση της ταχύτητας ταλάντωσης προηγείται κατά $\frac{\pi}{2}$ από την φάση της απομάκρυνσης. **Σωστό**

(β) Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι αντίρροπα, όταν το σώμα κινείται προς την θέση ισορροπίας του. **Λάθος**

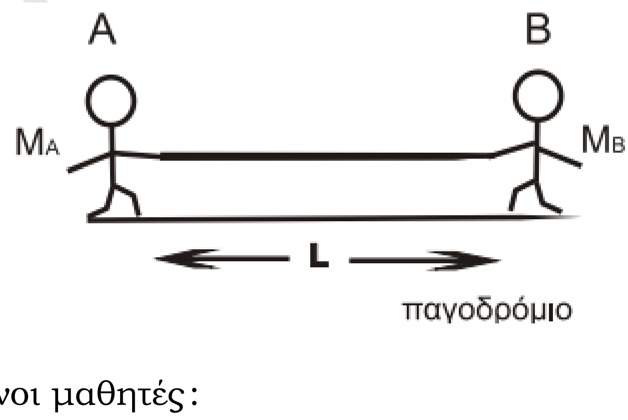
(γ) Δύο σημειακά σφαιρίδια με ίσες μάζες ανταλλάσσουν ταχύτητες σε κάθε ελαστική κρούση μεταξύ τους. **Λάθος**

(δ) Η Ενέργεια διατηρείτε σταθερή σε κάθε είδος κρούσης. **Σωστό**

(ε) Σε μια κρούση αμελητέας χρονικής διάρκειας η δυναμική ενέργεια των σωμάτων, που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο , δεν μεταβάλλεται. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1 Δύο μαθητές Α και Β, με μάζες M_A και M_B ($M_A < M_B$), στέκονται αρχικά ακίνητοι πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο ενός παγοδρομίου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δύο μαθητές κρατάνε τις άκρες ενός σχοινιού σταθερού μήκους L. Κάποια στιγμή οι μαθητές αρχίζουν να μαζεύουν ταυτόχρονα το σχοινί και κινούνται στην ίδια ευθεία. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα οι μαθητές αγκαλιάζονται και παραμένουν αγκαλιασμένοι.

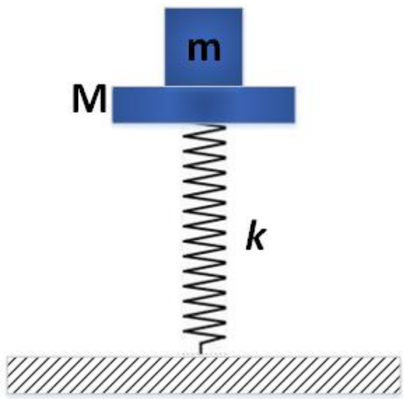


Οι αγκαλιασμένοι μαθητές:

(γ) θα παραμείνουν ακίνητοι.

Το σύστημα των μαθητών και του σχοινιού είναι μονωμένο αφού δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (το δάπεδο είναι λείο), άρα η ορμή του συστήματος θα παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασης. Αφού αρχικά οι μαθητές είναι ακίνητοι η ορμή του συστήματος θα είναι συνεχώς μηδέν.

Β.2. Δίσκος Μάζας M είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Πάνω στον δίσκο τοποθετούμε σώμα μάζας m και το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί ακίνητο όπως στο σχήμα.



Με κατάλληλη δύναμη μετακινούμε το σύστημα συσπειρώνοντας επιπλέον το ελατήριο κατά d και τα αφήνουμε ελεύθερα, έτσι ώστε να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση, χωρίς να χάνουν επαφή μεταξύ τους. Για την αρχική μετακίνηση d πρέπει να ισχύει:

(α) $d \leq \dfrac{(M+m)g}{k}$

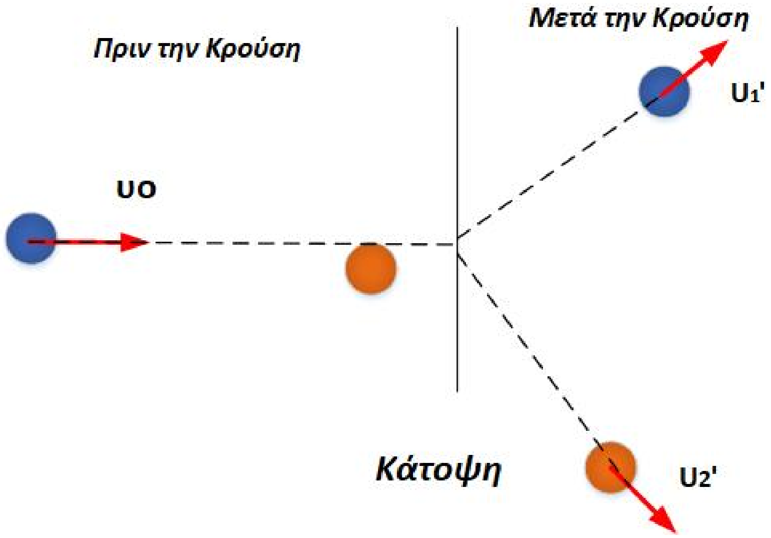
Σε μια τυχαία θέση πάνω από την θέση ισορροπίας του συστήματος στο σώμα θα ασκείται η δύναμη επαφής N και το βάρος του, ενώ το σύστημα θα εκτελεί ααΤ με σταθερά επαναφοράς $D = k = (m_1 + m_2)\omega^2$, εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το σώμα:

$$\Sigma F = -m\omega^2 x \Rightarrow N - mg = -m\frac{k}{m+M}x$$

Για να μην χάνει επαφή το σώμα από τον δίσκο πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow mg - m\frac{k}{m+M}x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{(m+M)g}{k}$$

Β.3. Πάνω σε ένα λείο πειραματικό τραπέζι σφαιρίδιο μάζας m_1 κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα μέτρου υ_o και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με ακίνητο σφαιρίδιο μάζας m_2.



Αν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και τα σώματα μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες που είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε ισχύει ότι:

(α) $\dfrac{m_1}{m_2} = 1$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες άρα:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$$

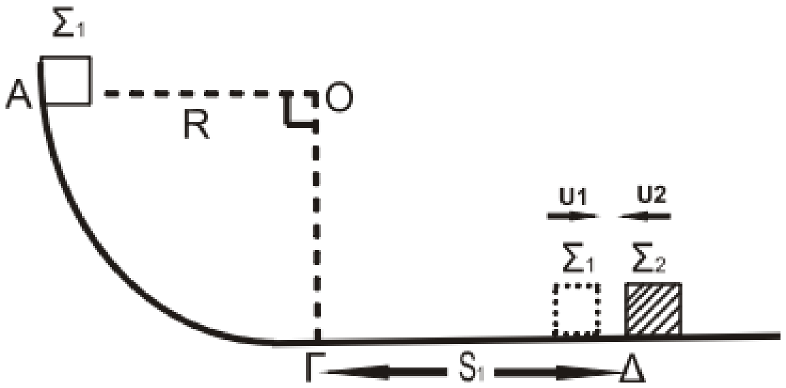
Επειδή το σύστημα είναι μονωμένο εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{P} = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \Rightarrow m_1\upsilon_0 = \sqrt{(m_1\upsilon_1')^2 + (m_2\upsilon_2')^2 + 2m_1\upsilon_1'm_2\upsilon_2'\sigma\upsilon\nu 90} \Rightarrow$$
$$(m_1\upsilon_o)^2 = (m_1\upsilon_1')^2 + (m_2\upsilon_2')^2$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η απάντηση!

Θέμα Γ

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 βρίσκεται στο σημείο Α λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου $(\hat{A\Gamma})$. Η ακτίνα ΟΑ είναι οριζόντια και ίση με $R = 5m$. Το σώμα αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου. Φθάνοντας στο σημείο Γ του τεταρτοκυκλίου, το σώμα συνεχίζει την κίνησή του σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$. Αφού διανύσει διάστημα $S_1 = 3,6m$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά στο σημείο Δ με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3m_1$, το οποίο τη στιγμή της κρούσης κινείται αντίθετα ως προς το Σ_1, με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 4m/s$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

Γ.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 στο σημείο Γ, όπου η ακτίνα ΟΓ είναι κατακόρυφη.

Εφαρμόζουμε για την κάθοδο στο ημικύκλιο το ΘΜΚΕ:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = m_1 g R \Rightarrow \upsilon_o = 10m/s$$

Γ.2 Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Το σώμα κινείται οριζόντια με την επίδραση της Τριβής για την οποία ισχύει ότι: $T = \mu N = \mu m_1 g$, εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του μέχρι το σημείο Δ

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_o^2 = -\mu m_1 g S_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 8m/s$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = -10m/s \Rightarrow |\upsilon_1'| = 10m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$$

Προσοχή για να έχω το σωστό αποτέλεσμα αντικαθιστώ την υ_2 με την αλγεβρική της τιμή που είναι αρνητική λόγω της φοράς κίνησης.

Γ.3 Δίνεται η μάζα του σώματος Σ_2 $m_2 = 3kg$. Να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 κατά την κρούση και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της.

$$\Delta\vec{P}_2 = \vec{P}_2' - \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta P_2 = 18kg \cdot m/s$$

Η φορά της μεταβολής είναι προς τα δεξιά, αφού την έχω λάβει ως θετική φορά.

Γ.4 Να υπολογίσετε το ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 κατά την κρούση.

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} \cdot 100\% = 56,25\%$$

Θέμα Δ

Το πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$ στερεώνεται στην οροφή ερευνητικού εργαστηρίου, ενώ στο κάτω άκρο του ισορροπεί δεμένο σώμα μάζας $m = 4kg$. Από την θέση αυτή εκτοξεύουμε το σώμα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = 4m/s$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης.

Πρέπει να γίνει σχήμα με το ελατήριο στο φυσικό μήκος, το σώμα στην θέση ισορροπίας του και το σώμα σε μια τυχαία θέση. Στην θέση ισορροπίας το ελατήριο είναι επιμηκυσμένο κατά Δl_o. Παρακάτω η συνθήκη ισορροπίας και ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα σε μια τυχαία θέση κάτω από αυτή.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = 0,1m$$

$$\Sigma F = mg - k\left(\Delta l_o + x\right) = -kx$$

Το σώμα θα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς την σταθερά του ελατηρίου:

$$D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

Η εκτόξευση γίνεται από την θέση ισορροπίας του σώματος, άρα η ταχύτητα είναι ίση με την μέγιστη ταχύτητα:

$$\upsilon_o = \omega A \Rightarrow A = 0,4m$$

Τη στιγμή που το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l_1 = 0,3m$ και το σώμα κινείται προς την κατώτερη ακραία θέση της ταλάντωσης του, σφηνώνεται σε αυτό με ταχύτητα $\upsilon_2 = 4\sqrt{3}m/s$ ένα βλήμα, μάζας $m_2 = 2kg$, το οποίο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω.

Δ.2. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης την οποία θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα που θα προκύψει από την κρούση, *Την στιγμή της κρούσης εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για να υπολογίσω την ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται και βρίσκεται στην θέση* $x = \Delta l_1 - \Delta l_o = 0,2m$.

$$E = K + U \Rightarrow ...\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow \upsilon = \pm 2\sqrt{3}m/s$$

Για την κρούση εφαρμόζω την ΑΔΟ για να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$m_1\upsilon - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = 0$$

Το συσσωμάτωμα στιγμιαία ακινητοποιείται, άρα η θέση μετά την κρούση είναι η ακραία θέση για την ταλάντωση του συσσωματώματος. Η νέα θέση ισορροπίας βρίσκεται ποιο κάτω από την παλιά με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά $\Delta l_o'$*:*

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_o' = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_o' = 0,15m$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος θα είναι:

$$A' = \Delta l_1 - \Delta l_o' = 0,15m$$

Δ.3. Να υπολογίσετε το πηλίκο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς, προς την μέγιστη δύναμη του ελατηρίου.

$$\frac{F}{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{kA'}{k\Delta l_1} = \frac{1}{2}$$

Δ.4. το ρυθμό μεταβολής της ορμής, το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, την χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος m_1.

Θεωρώ ως θετική φορά την φορά προς τα κάτω, άρα όταν διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχική θέση ισορροπίας $x = -(\Delta l'_o - \Delta l_o) = -0,05m$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx = +20kgm/s^2$$

Δ.5. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του ελατηρίου από την χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση, έως την χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία για δεύτερη φορά.

Η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση, όταν το συσσωμάτωμα διέρχεται από την πάνω ακραία θέση, δηλαδή όταν διέρχεται από την θέση φυσικού μήκους και δεύτερη φορά, όταν διέρχεται από την κάτω ακραία θέση, δηλαδή την θέση που έγινε η κρούση.

$$W = -\Delta U_{\text{ελ}} = 0 - \frac{1}{2}k(\Delta l_1)^2 = -18J$$