

ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

4^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1α. (γ) A1β. (β)
A2α. (β) A2β. (γ)
A3α. (α) A3β. (δ)
A4α. (δ) A4β. (α)
A5. α.Σ β.Λ γ.Σ δ.Σ ε.Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Με κλειστό το άκρο Γ του σωλήνα, έχουμε υγρό σε ισορροπία και η πίεση στο άκρο Γ είναι $p_1 = p_{atm} + \rho g H$.

Ανοίγοντας το άκρο Γ του οριζόντιου σωλήνα, το νερό βρίσκεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα με αποτέλεσμα η πίεση στο Γ να γίνει ίση με $p_2 = p_{atm}$.

Επομένως η πίεση μεταβλήθηκε κατά $\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho g H$.

B2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για το δοχείο Α

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Βερνούλι για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho_1 v_A^2$$

Για το σημείο 1 που βρίσκεται κάτω από το διάφραγμα ισχύει $p_1 = \rho_2 g h + p_{atm}$ και $v_1 = 0$ αφού η επιφάνεια βάσης του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής της οπής.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση

$$\text{Βερνούλι παίρνουμε } (\rho_1 + \rho_2) g h = \frac{1}{2} \rho_1 v_A^2 \quad (1)$$

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για το δοχείο Β.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Βερνούλι για τα σημεία 3 και 4 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

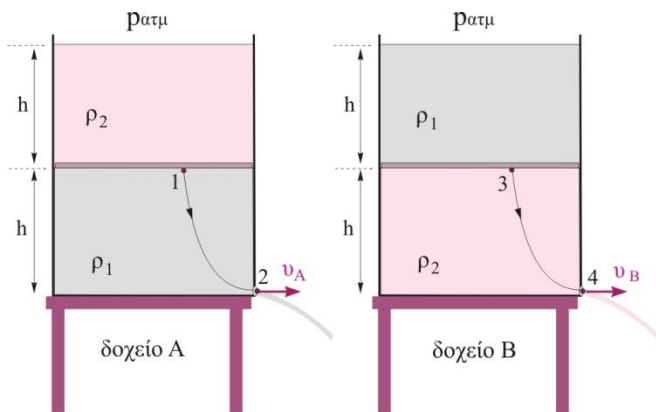
$$p_3 + \frac{1}{2} \rho_2 v_3^2 + \rho_2 g h = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2$$

Για το σημείο 3 που βρίσκεται κάτω από το διάφραγμα ισχύει $p_3 = \rho_1 g h + p_{atm}$ και $v_3 = 0$, αφού η επιφάνεια βάσης του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή της οπής.

$$\text{Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Βερνούλι παίρνουμε } (\rho_1 + \rho_2) g h = \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2 \quad , \quad (2)$$

$$\text{Συγκρίνοντας τις (1), (2) παίρνουμε } \frac{1}{2} \rho_1 v_A^2 = \frac{1}{2} \rho_2 v_B^2 \quad \text{ή} \quad 4 v_A^2 = v_B^2 \quad \text{ή} \quad v_B = 2 v_A$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).



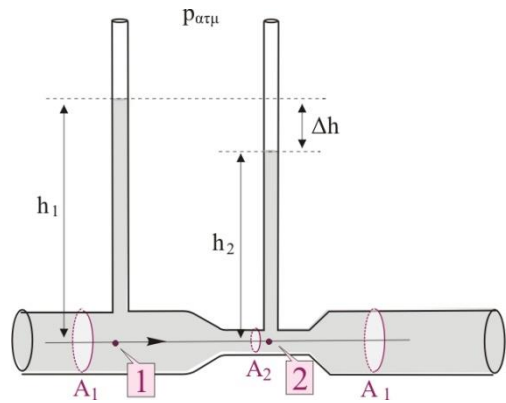
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας οριζόντιας ρευματικής γραμμής.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1)$$

όπου $p_1 = \rho g h_1 + p_{\text{ατμ}}$, (2) και

$$p_2 = \rho g h_2 + p_{\text{ατμ}}, \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) στην (1) παίρνουμε



$$\rho g h_1 + p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{ή} \quad \rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{ή}$$

$$2g \cdot \Delta h = v_2^2 - v_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

Αν η παροχή διπλασιαστεί, θα διπλασιαστεί το μέτρο των ταχυτήτων v_1 , v_2 και η διαφορά ύψους θα γίνει

$$\Delta h' = \frac{(2v_2)^2 - (2v_1)^2}{2g} = \frac{4(v_2^2 - v_1^2)}{2g} \quad \text{ή} \quad \Delta h' = 4\Delta h$$

B4. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β ισούται με το άθροισμα των μεταβολών της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας και της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου.

$$\frac{\Delta E_{\text{πρ}}}{\Delta V} = \frac{\Delta U}{\Delta V} + \frac{\Delta K}{\Delta V}$$

Επομένως, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου είναι

$$\frac{\Delta K}{\Delta V} = \frac{\Delta E_{\text{πρ}}}{\Delta V} - \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

Από την εκφώνηση, η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β είναι μικρότερη από την προκαλούμενη αύξηση της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του υγρού, άρα

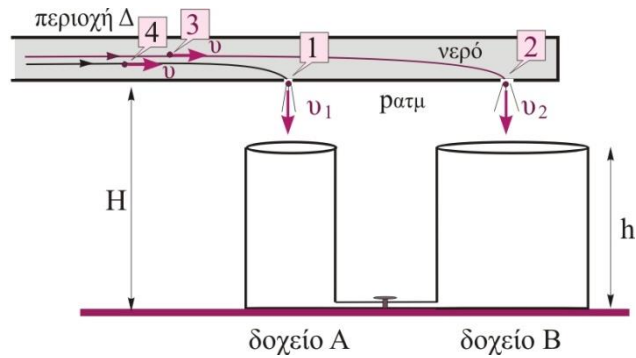
$$\frac{\Delta K}{\Delta V} < 0 \quad \text{ή} \quad K_2 < K_1 \quad \text{ή} \quad v_2 < v_1$$

Εφόσον η παροχή διατηρείται σταθερή ισχύει

$$\Pi_A = \Pi_B \quad \text{ή} \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{ή} \quad A_2 > A_1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για δύο σημεία μιας ρευματικής γραμμής που διέρχεται από την εσωτερική περιοχή Δ του σωλήνα, σημείο 3 και από το σημείο 2, όπου η φλέβα νερού εξέρχεται στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα μέτρου u_2 .



$$p_3 + \frac{1}{2} \rho u_3^2 + \rho g H = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g H \Rightarrow p_3 + \frac{1}{2} \rho u_3^2 = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (1)$$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο για τη ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 4 και 1 (βλέπε σχήμα).

$$p_4 + \frac{1}{2} \rho u_4^2 + \rho g H = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g H \Rightarrow p_4 + \frac{1}{2} \rho u_4^2 = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \quad (2)$$

Στην περιοχή Δ οι πιέσεις στα σημεία 3 και 4 είναι ίδιες, επομένως, συγκρίνοντας τις (1) και (2), προκύπτει ότι $u_1 = u_2 = 10 \text{ m/s}$.

Γ2) Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στα σημεία εκροής του από τις τρύπες δίνεται από τη σχέση

$$\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2} \Delta m \cdot u^2}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{K}{\Delta V} = 50.000 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Γ3) Η παροχή του σωλήνα είναι σταθερή, επομένως σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_3 = \Pi_1 + \Pi_2 \quad \text{ή} \quad A u_\Delta = A_1 u_1 + A_2 u_2 \quad \text{ή}$$

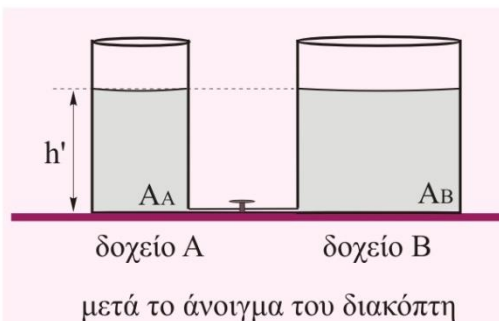
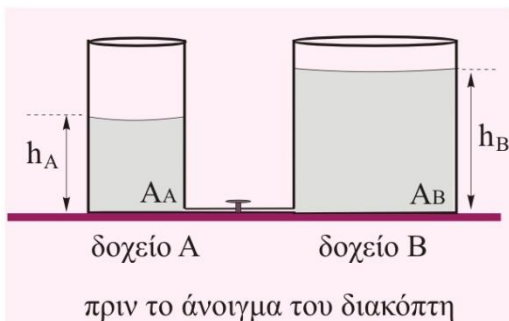
$$u_\Delta = \frac{A_1 u_1 + A_2 u_2}{A} = \frac{(10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 + 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{600 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \quad \text{ή} \quad u_\Delta = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η πίεση στο Δ (p_3) θα υπολογιστεί από τη σχέση (1)

$$p_3 = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_3^2) = 100.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$p_3 = 149.875 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Γ4) Η αιτία κίνησης των ρευστών είναι η διαφορά πίεσης. Η ροή του νερού από το ένα δοχείο προς το άλλο θα σταματήσει όταν οι πιέσεις εκατέρωθεν του διακόπτη γίνουν ίσες. Αυτό θα συμβεί όταν η ελεύθερες στάθμες του νερού στα δύο δοχεία φθάσουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Αρχικά, βρίσκουμε το ύψος του νερού στο δοχείο Β, όταν στο πρώτο δοχείο είναι $h_A = 1,2\text{m}$.

Αν με V_A, V_B , συμβολίσουμε τον όγκο νερού που συλλέγεται αντίστοιχα στα δοχεία Α και Β, τότε για το λόγο τους ισχύει:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\Pi_B \Delta t}{\Pi_A \Delta t} = \frac{A_2 v_2}{A_1 v_1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = 2 \Rightarrow \frac{A_B h_B}{A_A h_A} = 2 \Rightarrow \frac{1,5 A_A h_B}{A_A h_A} = 2 \Rightarrow$$

$$h_B = \frac{2}{1,5} h_A = \frac{2}{1,5} 1,2\text{m} \Rightarrow h_B = 1,6\text{m}$$

Αν με m_A, m_B , συμβολίσουμε τις μάζες νερού που συλλέγονται αντίστοιχα στα δοχεία Α και Β και m'_A, m'_B τις μάζες νερού που αποκτούν τελικά τα δοχεία, τότε από την αρχή διατήρησης της ύλης μπορούμε να γράψουμε:

$$m_A + m_B = m'_A + m'_B \Rightarrow \rho V_A + \rho V_B = \rho V'_A + \rho V'_B \Rightarrow$$

$$A_A h_A + A_B h_B = A_A h' + A_B h' \Rightarrow h' = \frac{A_A h_A + A_B h_B}{A_A + A_B} = \frac{A_A h_A + 1,5 A_A h_B}{A_A + 1,5 A_A} \Rightarrow$$

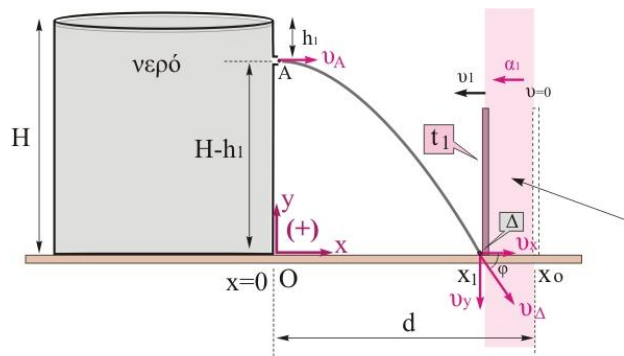
$$h' = \frac{h_A + 1,5 h_B}{1 + 1,5} = \frac{1,2\text{m} + 1,5 \cdot 1,6\text{m}}{2,5} \Rightarrow h' = 1,44\text{m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Όταν η τάπα αφαιρεθεί, το νερό που θα βγει από την οπή θα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος $H-h_1$ με ταχύτητα v_A της οποίας το μέτρο βρίσκεται από το θεώρημα Torricelli (το ύψος του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερό).

Προκύπτει $v_A = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\text{m}}$ ή $v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



επιταχυνόμενη κίνηση της
δοκού στο χρονικό διάστημα 0-t1

Όταν το νερό φθάνει στο έδαφος, σημείο Δ, έχει ταχύτητα που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων του στους δύο άξονες.

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς xOy , που έχει $x=0, y=0$ το σημείο O που βρίσκεται στη βάση της δεξαμενής και είναι πλησιέστερα προς την κατακόρυφη δοκό. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της 1^{ης} σταγόνας νερού που εξέρχεται από την οπή γράφονται:

$$\text{Άξονας } Ox: \quad u_x = u_A = 10 \text{ m/s} \quad (1)$$

$$x = u_A t \quad \text{ή} \quad x = 10t \quad (\text{SI}) \quad (2)$$

$$\text{Άξονας } Oy: \quad u_y = -gt \quad \text{ή} \quad u_y = -10t \quad (\text{SI}) \quad (3)$$

$$y = (H - h_1) - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{ή} \quad y = 20 - 5t^2 \quad (\text{SI}) \quad (4)$$

Όταν το νερό φθάνει στο έδαφος έχει $y=0$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (4) $y=0$ βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 που η 1^η σταγόνα φθάνει στο έδαφος.

$$\text{Προκύπτει, } 0 = 20 - 5t_1^2 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) βρίσκουμε την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ελάχιστα πριν φθάσει στο έδαφος.

$$\text{Προκύπτει, } u_y = -20 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της ταχύτητας της φλέβας λίγο πριν κτυπήσει στο δάπεδο, σημείο Δ , είναι

$$v_{\Delta} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \quad \text{ή} \quad v_{\Delta} = \sqrt{5} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

με κατεύθυνση που σχηματίζει με το οριζόντιο δάπεδο γωνία φ για την οποία ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -2$$

Δ2. Από την εξίσωση συνέχειας, για τη φλέβα νερού έχουμε

$$\Pi = \sigma\tau\alpha\theta \quad \text{ή} \quad A_{\text{οπ}} \cdot v = A \cdot v_{\Delta} \quad \text{ή} \quad A = \frac{A_{\text{οπ}} \cdot v}{v_{\Delta}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{5} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{ή}$$

$$A = 10^{-4} \text{ m}^2$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που αφαιρούμε την τάπα, η δοκός ξεκινά από τη θέση $x_0=24\text{m}$ και τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ φτάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Δ (θέση x_1) η πρώτη σταγόνα και η βάση της δοκού.

Η θέση x_1 αντιστοιχεί στην οριζόντια μετατόπιση της σταγόνας και βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (2), $t=t_1=2\text{s}$.

$$x_1 = 10 \cdot t_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} \quad \text{ή} \quad x_1 = 20\text{m}$$

Η δοκός στο ίδιο χρονικό διάστημα ($0\text{s}-2\text{s}$) εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και η κίνησή της περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$v_{\text{δοκ}} = \alpha_1 \cdot t \quad 0\text{s} \leq t \leq 2\text{s} \quad (5)$$

$$x_{\delta} = x_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad x_{\delta} = 24 + \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t^2 \quad (\text{SI}) \quad \text{με} \quad 0\text{s} \leq t \leq 2\text{s} \quad (6)$$

Η επιτάχυνση α_1 βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (6), $x_\delta = x_1 = 20\text{m}$ και $t=t_1=2\text{s}$, προκύπτει,

$$20\text{m} = 24\text{m} + \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot (2\text{s})^2 \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης.

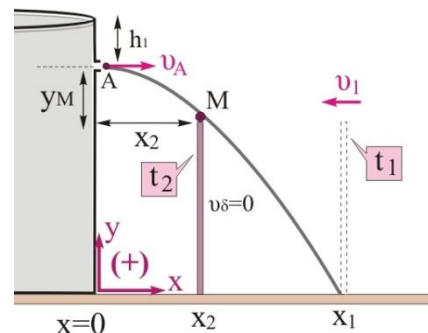
Δ4. Τη στιγμή t_1 η δοκός έχει αποκτήσει ταχύτητα, v_1 , που βρίσκεται από τη σχέση (5), αν αντικαταστήσουμε $t=t_1=2\text{s}$ και $\alpha_1 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, προκύπτει

$$v_{\text{δοκ}} = \alpha_1 \cdot t \Rightarrow v_1 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} \quad \text{ή} \quad v_1 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από τη στιγμή t_1 και μετά η δοκός επιβραδύνεται ομαλά και σταματά τη χρονική στιγμή t_2 στη θέση x_2 όπου η φλέβα νερού περνά οριακά πάνω από ψηλότερο σημείο της σημείο Μ, (βλέπε σχήμα).

Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες, $x_M = x_2$ και $y_M = h_{\text{δοκού}} = 15\text{m}$

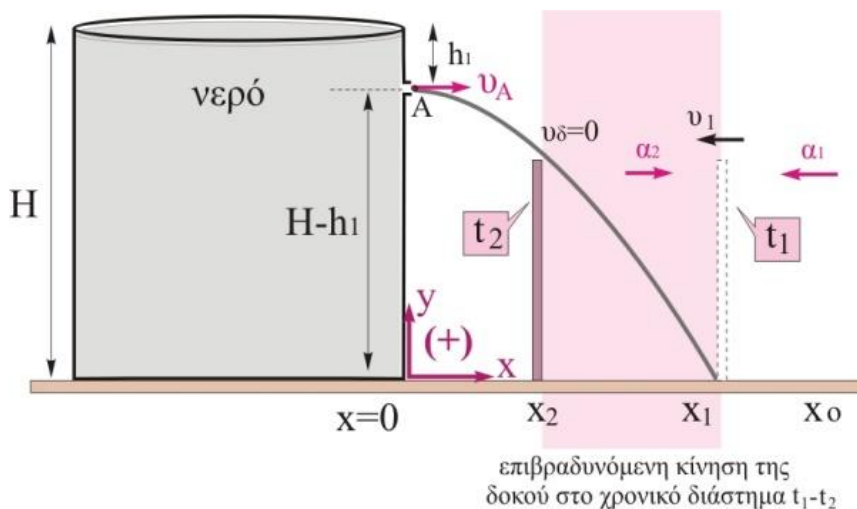
Από την εξίσωση τροχιάς της φλέβας νερού, υπολογίζουμε την απόσταση x_2 .



Ο συνδυασμός των σχέσεων (2) και (4) δίνει:

$$y = 20 - 5 \left(\frac{x}{10} \right)^2 \Rightarrow y = 20 - \frac{5}{100} x^2$$

Και με αντικατάσταση, $y = y_M = h_{\text{δοκού}} = 15\text{m}$ προκύπτει $15 = 20 - \frac{5}{100} x_2^2 \Rightarrow x_2 = 10\text{m}$



Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της δοκού στη φάση της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι

$$v_{\text{δοκ}} = v_1 + \alpha_2 \Delta t \quad \text{ή} \quad v_{\text{δοκ}} = -4 + \alpha_2 (t - 2) \quad (\text{SI}) \quad (7)$$

$$x_{\delta} = x_1 + v_{\delta\text{οκ}} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad x_{\delta} = 20 - 4(t-2) + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot (t-2)^2 \quad (\text{SI}) \quad (8)$$

Όταν $v_{\delta\text{οκ}} = 0$, $x_{\delta} = 10\text{m}$.

Έτσι, οι σχέσεις (7) και (8) γίνονται αντίστοιχα:

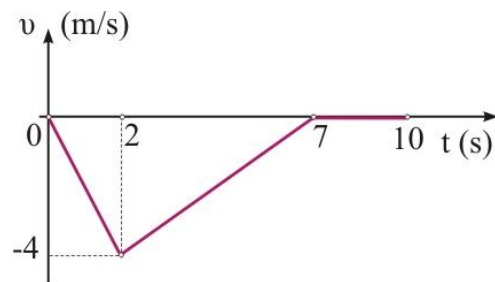
$$0 = -4 + \alpha_2(t-2) \quad (\text{SI}) \quad , \quad 10 = 20 - 4(t-2) + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot (t-2)^2 \quad (\text{SI})$$

Η λύση του συστήματος των δύο τελευταίων εξισώσεων δίνει:

$$\alpha_2 = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{και} \quad t = 7\text{s}$$

Άρα, η συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα της δοκού σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$v_{\delta\text{οκ}} = \begin{cases} -2t \quad (\text{SI}) & 0 \leq t \leq 2\text{s} \\ -4 + 0,8(t-2) \quad (\text{SI}) & 2\text{s} \leq t \leq 7\text{s} \end{cases}$$



Το διάγραμμα ταχύτητας- χρόνου για τη δοκό φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι Λάλος Νικόλαος και Ποντικός Ηλίας, Φυσικοί.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.