Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κύματα - Φαινόμενο Doppler

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

A.1. Η συχνότητα ταλάντωσης μιας πηγής, που παράγει εγκάρσιο αρμονικό κύμα σε ένα ελαστικό μέσο, διπλασιάζεται χωρίς να μεταβληθεί το πλάτος της ταλάντωσης. Τότε:

(γ) το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος υποδιπλασιάζεται.

A.2. Σε ένα παρατηρητή φτάνουν στην μονάδα του χρόνου περισσότερα μέγιστα από όσα παράγει στον ίδιο χρόνο μια ηχητική πηγή, όταν,

(δ) ο παρατηρητής πλησιάζει προς την ακίνητη πηγή.

A.3. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κύματα με ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα και αντίθετες ταχύτητες. Δύο σημεία Μ και Ν βρίσκονται εκατέρωθεν ενός σημείου Λ που παραμένει συνεχώς ακίνητο. Τα σημεία απέχουν απόσταση $\frac{\lambda}{3}$, όπου λ το μήκος κύματος. Οι ταλαντώσεις των σημείων Μ και Ν:

(α) βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

A.4. Μια πηγή S βρίσκεται μεταξύ δύο ακίνητων παρατηρητών Α και Β. Η πηγή πλησιάζει προς τον Α ενώ απομακρύνεται από τον Β. Το μήκος κύματος που εκπέμπει η πηγή είναι λ_S και ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα $\upsilon_{\text{ηχ}}$.

(γ) Ο παρατηρητής Β αντιλαμβάνεται ήχο που διαδίδεται με ταχύτητα ίση με την $\upsilon_{\text{ηχ}}$.

Α.5.

(α) Σε κάθε εγκάρσιο κύμα δημιουργούνται πυκνώματα και αραιώματα. **Λάθος**

(β) Σε ένα στάσιμο κύμα, που έχει δημιουργηθεί σε ένα ελαστικό μέσο, η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι ίση με ένα μήκος κύματος λ. **Λάθος**

(γ) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίδιο για κάθε σημείο μιας χορδής στην οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα. **Λάθος**

(δ) Το φαινόμενο Doppler αξιοποιείται από τους γιατρούς για την παρακολούθηση της ροής του αίματος. **Σωστό**

(ε) Ένα σύνθετο κύμα μπορούμε να το θεωρήσουμε ως αποτέλεσμα της επαλληλίας ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων με επιλεγμένα πλάτη και μήκη κύματος. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Κατά μήκος μιας χορδής μήκους L έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Τα άκρα της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένα και στην χορδή υπάρχει μόνο ένα σημείο που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.

Για να δημιουργηθούν στην ίδια χορδή τέσσερα συνολικά σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος θα πρέπει να μειώσουμε την περίοδο των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κατά:

(β) 75%

Αρχικά η χορδή έχει δύο δεσμούς στα άκρα και μια κοιλία ανάμεσα, άρα $L = \frac{\lambda}{2}$. *Στην συνέχεια παραμένουν οι δύο δεσμοί στα άκρα και αποκτά 4 κοιλίες ανάμεσα, άρα* $2\lambda'$. *Οπότε:*

$$\frac{\lambda}{2} = 2\lambda' \Rightarrow \lambda = 4\lambda' \Rightarrow \upsilon_\delta T = 4\upsilon_\delta T' \Rightarrow T' = \frac{T}{4}$$

Β.2. Σε σημεία Κ και Λ μιας επιφάνειας ενός υγρού βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 οι οποίες ταλαντώνονται με εξίσωση της μορφής $y = A\eta\mu(\omega t)$ και παράγουν κύματα με μήκος κύματος λ. Σημείο Ζ της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις πηγές αποστάσεις d_1 και d_2 και έχει μέγιστη τιμή για την ταχύτητα ταλάντωσης ίση με $\upsilon_{max} = \omega A\sqrt{3}$. Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων που εκτελεί ταυτόχρονα το σημείο Ζ μετά την συμβολή μπορεί να είναι ίση με:

(α) $\dfrac{\pi}{3}$

$$\upsilon_{max} = \omega A' = \omega 2A|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{d_2 - d_1}{2\lambda}\right)| \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{d_2 - d_1}{2\lambda}\right)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων ορίζεται ως:

$$\Delta\phi = 2\pi\left(ft - \frac{d_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(ft - \frac{d_2}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\left(\frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{3}$$

Είναι προφανές ότι υπάρχουν και άλλες λύσεις στην τριγωνομετρική εξίσωση, αλλά επιλέγω με βάση τις προτεινόμενες απαντήσεις.

Β.3. Ο παρατηρητής του σχήματος απομακρύνεται από την ακίνητη ηχητική πηγή **S** με ταχύτητα υ_A. Η διαφορά των συχνοτήτων των ήχων που ακούει ο παρατηρητής απευθείας και από ανάκλαση ισούται με το 3% της συχνότητας που η πηγή εκπέμπει. Ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα:

(α) $\dfrac{1,5}{100}\upsilon_{\text{ηχ}}$

Ο παρατηρητής θα ακούει απευθείας από την πηγή ήχο συχνότητας f_1:

$$f_1 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s$$

Στο τοίχο θα ανακλάται ήχος συχνότητας f_s αφού δεν υπάρχει σχετική κίνηση ανάμεσα στον τοίχο και τον παρατηρητή. Ο παρατηρητής θα ακούει από την ανάκλαση ήχο συχνότητας f_2:

$$f_2 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s$$

Από τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 = \frac{3}{100} fs \quad &\Rightarrow \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s - \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s = \frac{3}{100} f_s \\ &\Rightarrow \frac{2\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} = \frac{3}{100} \Rightarrow \upsilon_A = \frac{1,5}{100} \upsilon_{\eta\chi} \end{aligned}$$

Θέμα Γ

Κατά μήκος ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ διαδίδεται αρμονικό κύμα προς την αρνητική κατεύθυνση. Ένα υλικό σημείο του μέσου με στοιχειώδης μάζα $\Delta m = 0,002kg$ που βρίσκεται στην θέση Ο $(x = 0)$, ξεκινά την ταλάντωση του από την θέση ισορροπίας του την χρονική στιγμή $t_o = 0$ με ενέργεια ταλάντωσης $E_o = 4\pi^2 \cdot 10^{-5} J.$ κινούμενο προς τα πάνω. Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της ταχύτητας ταλάντωσης για το σημείο Ο είναι $\Delta t = 0,2s$ και στο ίδιο χρονικό διάστημα το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\Delta x = 0,4m$.

Γ.1 Να υπολογίσετε την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου καθώς και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Από τα δεδομένα της εκφώνησης προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $\upsilon_\delta = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 2m/s$

- $\Delta t = \dfrac{T}{2} \Rightarrow T = 0,4s \Rightarrow f = 2,5Hz$
- $\upsilon_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,8m$
- $E_o = \dfrac{1}{2}\Delta m\omega^2 A^2 \Rightarrow A = 4cm \Rightarrow \upsilon_{max} = 0,2\pi m/s$

Γ.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου Μ την στιγμή που η απομάκρυνση του από την θέση ισορροπίας είναι $y = 2cm$

Από την ΑΔΕΤ για το σημείο Μ προκύπτει:

$$E = K + U \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow \upsilon = 0,1\pi\sqrt{3}m/s$$

Γ.3 Να γράψετε την συνάρτηση της φάσης ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου σε τυχαία χρονική στιγμή και να σχεδιάσετε το διάγραμμα $\phi = f(x)$ την χρονική στιγμή $t_1 > 0$ για την οποία το σημείο Ο φτάνει για τρίτη φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης.

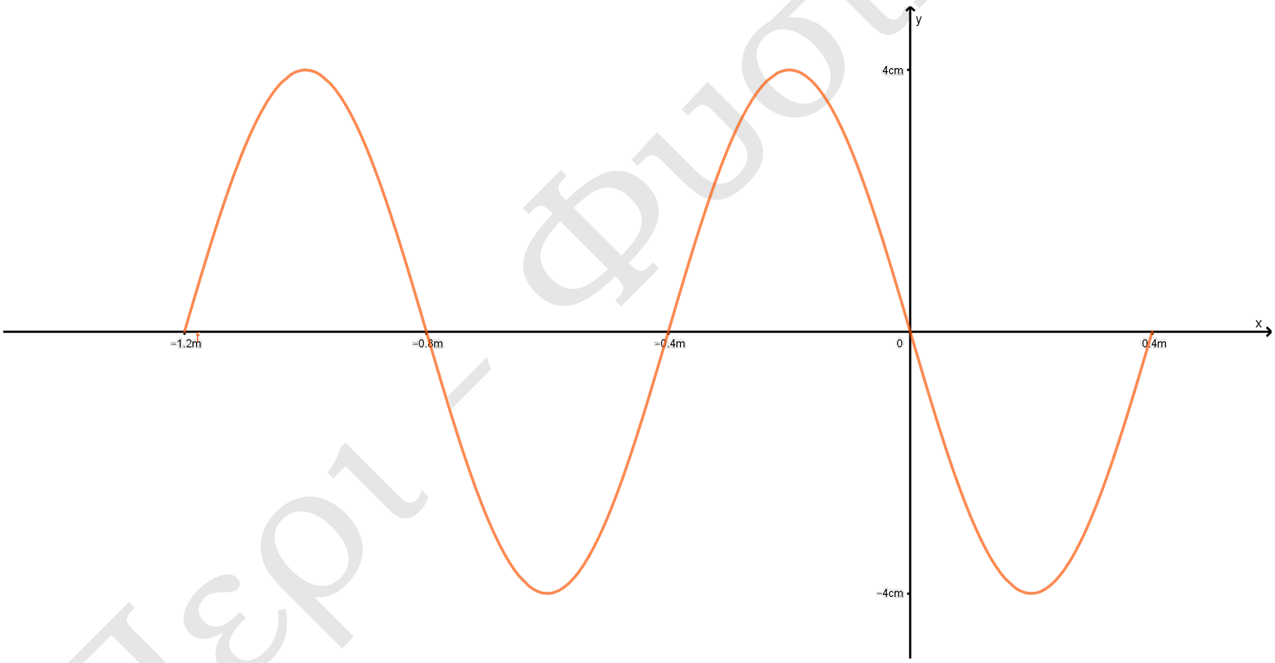
$$\phi = 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi = 5\pi t + 2,5\pi x \quad (S.I)$$

Η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με $T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4} = 0,5s$. Άρα η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι:

$$\phi = 2,5\pi + 2,5\pi x \quad , x \geq -1m$$

Παραπάνω το ζητούμενο διάγραμμα!

Γ.4 Να σχεδιάσετε το τμήμα στιγμιοτύπου του κύματος την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$, ανάμεσα στο σημείο που το κύμα φτάνει εκείνη την στιγμή και το σημείο Ζ $(x_z = +0,4m)$.



Γ.5 Αν το σημείο Μ διέρχεται από την θέση $y = 2cm$ με θετική ταχύτητα σε μια χρονική στιγμή, να βρεθεί την ίδια χρονική στιγμή η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Λ το οποίο προηγείται φασικά από το Μ κατά $\frac{5\pi}{3}$ rad.

$$\left[y_M = A\eta\mu\phi_M = \frac{A}{2}, \upsilon_M = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\phi_M = +\upsilon_{max} \right] \Rightarrow \phi_M = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\upsilon_\Lambda = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\phi_M + \frac{5\pi}{3}\right) = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}\right) = 0,1\pi\sqrt{3}m/s$$

Θέμα Δ

Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται σε σημεία Κ και Λ αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού με (ΚΛ) = $4,75m$. Οι πηγές την $t = 0$ ξεκινούν από την ηρεμία να εκτελούν εγκάρσια προς την επιφάνεια ταλάντωση με ταχύτητα φοράς προς τα πάνω και μέτρου $8\pi\ cm/s$, ενώ κάθε πηγή εκτελεί 120 ταλαντώσεις το λεπτό. Τα παραγόμενα από τις πηγές κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon = 2\ m/s$ Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού εκτελεί εξαιτίας του κύματος που παράγει η Π_1 ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_1 = A\eta\mu\left(\omega t - 3\pi\right) \tag{1}$$

ενώ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση της μορφής:

$$y = A'\eta\mu\left(\omega t - \frac{13\pi}{4}\right) \tag{2}$$

Δ.1 Να βρείτε την εξίσωση ταλάντωσης $y_2 = f(t)$ του σημείο Σ εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την Π_2.

Από τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε:

- $f = \dfrac{N}{t} = 2Hz \Rightarrow \upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = 1$
- $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = 2cm$
- $2\pi\dfrac{r_1}{\lambda} = 3\pi \Rightarrow r_1 = \dfrac{3}{2}m$
- $2\pi\dfrac{r_1 + r_2}{2\lambda} = \dfrac{13\pi}{4} \Rightarrow r_2 = \dfrac{7}{4}m$

Άρα η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Σ εξαιτίας του κύματος από την μια πηγή θα είναι:

$$y_2 = 0,02\eta\mu\,(4\pi t - 3,5\pi)\ \ (S.I.)\ t \geq \frac{7}{8}s$$

Δ.2 Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης A′ του σημείου Σ μετά την συμβολή των κυμάτων σε αυτό και να σχεδιάσετε το διάγραμμα του πλάτους ταλάντωσης του Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο.

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\right| = 2\sqrt{2}cm$$

Δ.3 Η υπερβολή συμβολής που διέρχεται από το σημείο Σ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) σε σημείο Δ. Να υπολογίσετε την διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του Σ και Δ μετά την συμβολή των κυμάτων σε αυτά.

Το σημείο Δ βρίσκεται στην ίδια υπερβολή με το σημείο Σ άρα:

$$r_2' - r_1' = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = 0,25m$$

Το σημείο Δ βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές άρα:

$$r_2' + r_1' = (\mathrm{K\Lambda}) = 4.75m$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σημείο Δ απέχει από τις πηγές αποστάσεις $r_1' = 2,5m$ *και* $r_2 = 2,25m$. *Η φάση ταλάντωσης του Δ μετά την συμβολή θα είναι:*

$$\phi_\Delta = 2\pi\left(ft - 2\pi\frac{r_1' + r_2'}{2\lambda}\right) = 4\pi t - 4,75\pi$$

Η ζητούμενη διαφορά φάσης θα είναι:

$$\Delta\phi = \frac{3\pi}{2}rad$$

Δ.4 Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος (ΔΛ) στα οποία τα δύο κύματα θα συμβάλλουν ενισχυτικά.

Για ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΛ θα πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα:

- $r_1 + r_2 = 4,75$
- $r_1 - r_2 = N\lambda = N$
- $2,5 \leq r_1 \leq 4,75$

Από τις παραπάνω σχέσεις θα προκύψουν Ν = 1,2,3,4 άρα 4 σημεία ενισχυτικής συμβολής

Δ.5 Μεταβάλλουμε την συχνότητα των δύο πηγών έτσι ώστε να παραμένουν σύγχρονες. Να βρεθεί η ελάχιστη μεταβολή της συχνότητας των δύο πηγών, ώστε το σημείο Σ να παραμένει ακίνητο μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό.

Για να παραμένει ακίνητο το σημείο Σ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα πρέπει:

$$|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda'}{2} = (2N+1)\frac{\upsilon}{2f'} \Rightarrow f' = \frac{(2N+1)\upsilon}{2|r_1 - r_2|} = 8N+4$$

Άρα οι δυνατές τιμές της συχνότητας θα είναι: $f' = 4Hz, 12Hz, 28Hz, ...$, *οπότε η ελάχιστη μεταβολή είναι αύξηση κατά* $2Hz$.

Προσοχή !!

Το Διαγώνισμα έχει ένα επιστημονικό λάθος, καθώς οι αποστάσεις r_1 *και* r_2 *του σημείου Σ που έχουν επιλεγεί, όπως και η απόσταση ΚΛ δεν μπορούν να ορίσουν ένα τρίγωνο όπως και πρέπει. Αυτό δεν επηρεάζει βέβαια τις ¨τεχνικές¨ κατά την επίλυση της άσκησης μας, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η άσκηση είναι σωστή.*