Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*
Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις Β έκδοση

Θέμα Α

Α.1. Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων ισχύει ότι:

(δ) η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων παραμένει σταθερή.

Α.2. Σφαίρα Α συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β μεγαλύτερης μάζας. Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση:

(γ) θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική,

Α.3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του είναι μέγιστος σε απόλυτη τιμή όταν :

(β) η ορμή του σώματος είναι μηδέν,

Α.4. Σε μια γραμμική αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την εξίσωση: $x = A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης θα είναι:

(γ) $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Α.5.

(α) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από το πλάτος της. **Λάθος**

(β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το ταλαντούμενο σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι μηδενικός. **Σωστό**

(γ) Η σταθερά επαναφοράς μιας ταλάντωσης είναι ανάλογη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος. **Λάθος**

(δ) Σκέδαση ονομάζεται κάθε φαινόμενο του μικρόκοσμου στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια αλληλεπιδρούν με σχετικά μικρές δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο. **Λάθος**

(ε) Σε μια κρούση αμελητέας χρονικής διάρκειας η δυναμική ενέργεια των σωμάτων, που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο , δεν μεταβάλλεται. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το σώμα Σ_1 βρίσκεται πάνω στο Σ_2. Το σώμα Σ_2 είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο. Αφαιρούμε απότομα το σώμα Σ_1 , οπότε το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ως πάνω ακραία θέση τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Τη στιγμή που το ελατήριο είναι μέγιστα συμπιεσμένο, ο λόγος της ενέργειας ταλάντωσης προς την ενέργεια του ελατηρίου, είναι:

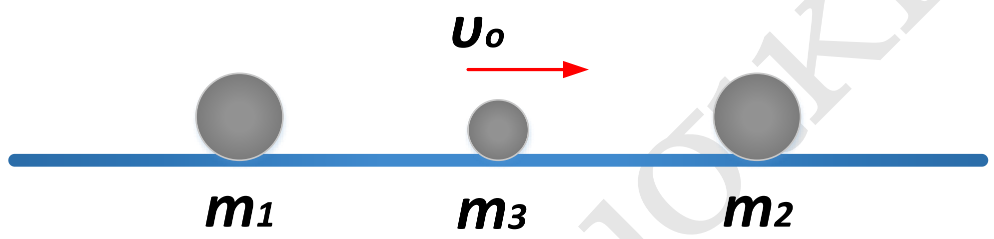
(α) $\frac{1}{4}$

Μετά την απομάκρυνση του ενός σώματος το άλλο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας από την κάτω ακραία θέση. Άρα αφού η θέση φυσικού μήκους είναι η πάνω ακραία θέση η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $\Delta l = 2A$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{E}{U_{\varepsilon\lambda}} = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}k\Delta l^2} = \left(\frac{A}{2A}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Β.2. Όλες οι σφαίρες του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ελαστικές και αρχικά είναι ακίνητες. Οι μάζες των σφαιρών συνδέονται με τη σχέση: $m_1 = m_2 = 4m_3$.



Στη σφαίρα μάζας m_3 δίνουμε αρχική ταχύτητα υ_o και οι κρούσεις που ακολουθούν είναι κεντρικές. Ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά είναι:

(α) 2

Για την πρώτη κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_3}{m_3 + m_2}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_o$$

$$\upsilon_3' = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_3' = -\frac{3}{5}\upsilon_o$$

Το Σ_3 αλλάζει φορά και με την ταχύτητα υ_3' συγκρούεται με το ακίνητο Σ_1, άρα για την δεύτερη κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_3}{m_3 + m_1}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = -\frac{6}{25}\upsilon_o$$

$$\upsilon_3'' = \frac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3'' = -\frac{3}{5}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3'' = \frac{9}{25}\upsilon_o$$

Το Σ_1 μετά τις παραπάνω δύο κρούσεις θα κινείται προς τα αριστερά και τα δύο άλλα σώματα προς τα δεξιά. Αφού $|\upsilon_2'| > |\upsilon_3''|$ δεν θα υπάρξει άλλη κρούση. Άρα θα πραγματοποιηθούν δύο κρούσεις συνολικά.

Β.3. Σφαίρα Α μάζας m κινούμενη με ταχύτητα υ συγκρούεται ελαστικά και έκκεντρα με ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Μετά την σύγκρουση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν την ίδια γωνία ϕ με την αρχική διεύθυνση κίνησης της σφαίρας Α. Η γωνία ϕ είναι ίση με:

(β) 45^o

Μετά την κρούση τα δύο σώματα θα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 2ϕ. Για την ελαστική κρούση ισχύουν:

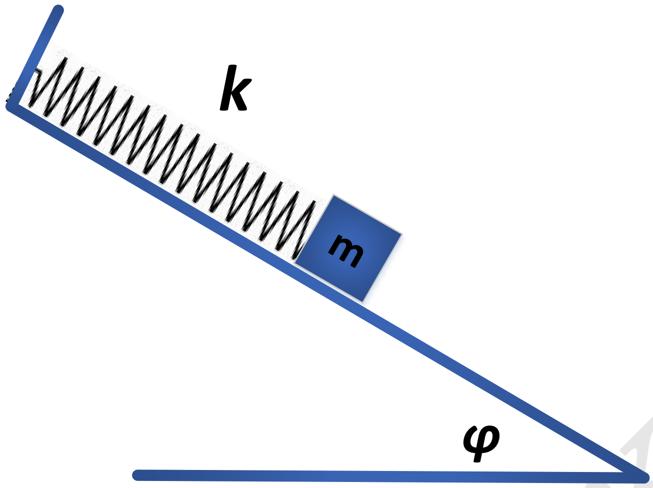
$$K_{\text{πριν}} = K_{\text{μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} \Rightarrow m\upsilon = \sqrt{(m\upsilon_1)^2 + (m\upsilon_2)^2 + 2(m\upsilon_1)(m\upsilon_2)\sigma\upsilon\nu(2\phi)}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu(2\phi) = 0 \Rightarrow 2\phi = 90^o$

Θέμα Γ

Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\phi = 30^o$. Στο ανώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου στερεώνουμε το άνω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε σώμα Σ μάζας $m = 2kg$, που ισορροπεί. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω , κατά $d = 0,1m$ από τη θέση ισορροπίας, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από την θέση αυτή.



Γ.1 Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

Δείτε θεωρία για την απόδειξη...

$$D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s \Rightarrow f = \frac{5}{\pi}Hz$$

Η αρχική εκτροπή θα είναι και το πλάτος της ταλάντωσης, αφού το αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα.

Γ.2 Σε ποιες τιμές της απομάκρυνσης του ταλαντωτή ο λόγος της κινητικής ενέργειας K του σώματος προς την ολική ενέργεια E της ταλάντωσης είναι $\frac{K}{E} = \frac{1}{4}$;

Εφαρμόσω την ΑΔΕΤ για $K = \frac{E}{4}$

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{E}{4} + U \Rightarrow U = \frac{3E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}DA^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow x = \pm 0,05\sqrt{3}m$$

Γ.3 Να υπολογίσετε τον λόγο του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς στην ανώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος.

Στην θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl_o

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = 0.05m.$$

Στην ανώτερη θέση το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l = A - \Delta l_o$

$$\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{F_{\varepsilon\pi}} = \frac{k\Delta l}{kA} = \frac{A - \Delta l_o}{A} = \frac{1}{2}$$

Γ.4 Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που για πρώτη φορά το σώμα περνά από τη θέση που το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

Όταν το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση φυσικού μήκους η απομάκρυνση από την ΘΙΤ θα είναι $x = +0.05m$.

Αφού την $t = 0$ *είναι στην ακραία αρνητική θέση, η εξίσωση ταλάντωσης θα είναι:* $x = 0.1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})$

$$0,05 = 0,1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

Λύνω την τριγωνομετρική εξίσωση κρατώντας τον μικρότερο χρόνο.

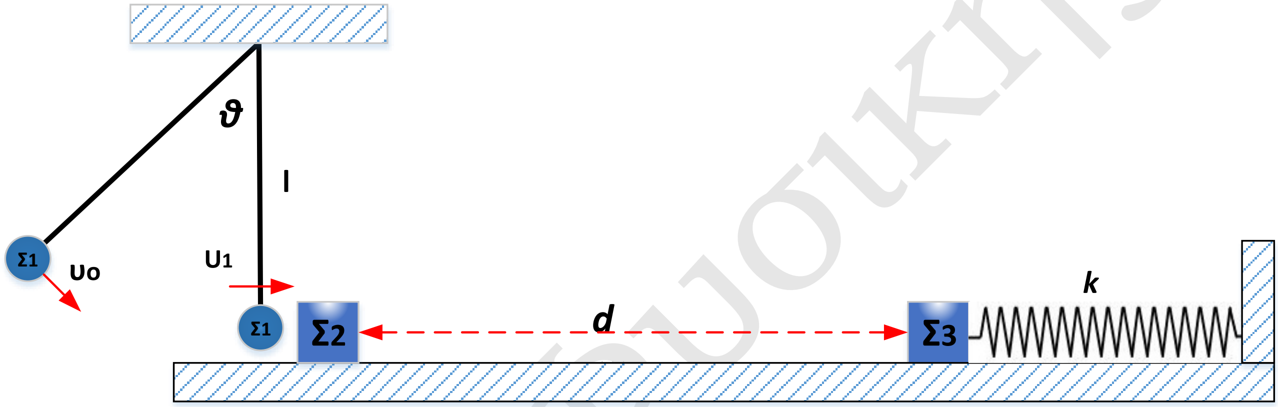
$$t = \frac{\pi}{15}s$$

** βέβαια μπορούμε να λύσουμε την άσκηση και με χρήση της αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος.*

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}}{10} = \frac{\pi}{15}s$$

Θέμα Δ

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ ισορροπεί κρεμασμένο από νήμα μήκους $l = 1,6m$. Εκτρέπουμε το σώμα, ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία θ με την αρχική του θέση και από την θέση αυτή το εκτοξεύουμε με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο το Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 8m/s$ και προσπίπτει κεντρικά και ελαστικά σε αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$.



Αμέσως μετά την κρούση το Σ_2 ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο και αφού διανύσει διάστημα $d = 1,75m$ προσκρούει σε αρχικά ακίνητο σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 1,5kg$ με αποτέλεσμα την δημιουργία συσσωματώματος.

Το Σ_3 είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 36N/m$ του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το ελατήριο την στιγμή της κρούσης βρίσκεται στο φυσικό μήκος του και τα σώματα Σ_2 και Σ_3 παρουσιάζουν με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Να υπολογίσετε:

Δ.1 το μέτρο της μεταβολής της ορμής του Σ_1 εξαιτίας της κρούσης του με το Σ_2.

Για την ελαστική κρούση έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -4m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 4m/s$$

Η μεταβολή της ορμής θα είναι:

$$|\Delta P_1| = |m_1\upsilon_1' - 0| = 4kg \cdot m/s$$

Δ.2 την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2.

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T - m_2 g = \frac{m\upsilon_2'^2}{l} \Rightarrow T = 60N$$

Δ.3 τη μέγιστη γωνία που θα διαγράψει το νήμα μετά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την ανύψωση του Σ_2 μετά την κρούση

$$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -m_1 g h \Rightarrow h = 0,8m$$

Από το τρίγωνο που σχηματίζεται

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{l-h}{l} = ...$$

Δ.4 την ενέργεια που χάθηκε στο περιβάλλον εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

Για την επιβράδυνση του Σ_2 πριν την δεύτερη κρούση του εφαρμόζω το ΘΜΚΕ

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow \upsilon_2'' = 3m/s$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζω την Α.Δ.Ο.:

$$m_2 \upsilon_2'' = (m_2 + m_3)\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = 2m/s$$

Οι ζητούμενες ενεργειακές απώλειες λόγω της πλαστικής κρούσης θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2''^2 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_k^2 = ...$$

Δ.5 την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Για την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, εφαρμόζω ΘΜΚΕ στο συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

$$0 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_k^2 = 0 - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \mu(m_2 + m_3)g\Delta l$$

Λύνω την δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει και βρίσκω την ζητούμενη παραμόρφωση Δl.

Σημείωση:

Είναι προφανές ότι απαιτείται σχήμα για την επίλυση των θεμάτων, ειδικά εκείνων που έχουν ελατήρια. Για λόγους περιορισμένου χρόνου δεν τα παραθέτω στις λύσεις μου.