Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων ισχύει ότι:

(δ) η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων παραμένει σταθερή.

Α.2. Σφαίρα Α συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β μεγαλύτερης μάζας. Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση:

(γ) θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική,

Α.3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του είναι μέγιστος σε απόλυτη τιμή όταν :

(β) η ορμή του σώματος είναι μηδέν,

Α.4. Σε μια γραμμική αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την εξίσωση: $x = A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης θα είναι:

(γ) $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Α.5.

(α) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από το πλάτος της. **Λάθος**

(β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το ταλαντούμενο σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι μηδενικός. **Σωστό**

(γ) Η σταθερά επαναφοράς μιας ταλάντωσης είναι ανάλογη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος. **Λάθος**

(δ) Σκέδαση ονομάζεται κάθε φαινόμενο του μικρόκοσμου στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια αλληλεπιδρούν με σχετικά μικρές δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο. **Λάθος**

(ε) Σε μια κρούση αμελητέας χρονικής διάρκειας η δυναμική ενέργεια των σωμάτων, που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο , δεν μεταβάλλεται. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το σώμα Σ_1 βρίσκεται πάνω στο Σ_2. Το σώμα Σ_2 είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο. Αφαιρούμε απότομα το σώμα Σ_1 , οπότε το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ως πάνω ακραία θέση τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Τη στιγμή που το ελατήριο είναι μέγιστα συμπιεσμένο, ο λόγος της ενέργειας ταλάντωσης προς την ενέργεια του ελατηρίου, είναι:

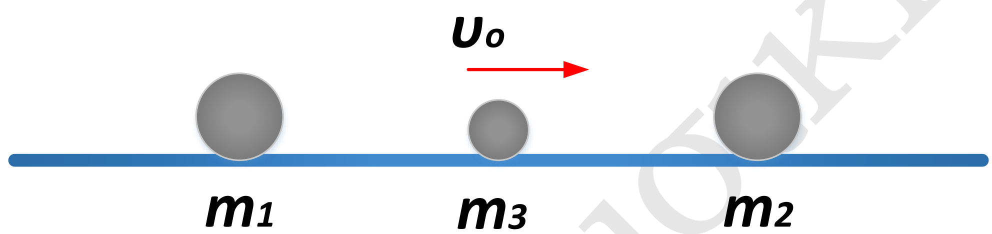
(α) $\dfrac{1}{4}$

Μετά την απομάκρυνση του ενός σώματος το άλλο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας από την κάτω ακραία θέση. Άρα αφού η θέση φυσικού μήκους είναι η πάνω ακραία θέση η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $\Delta l = 2A$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{E}{U_{\varepsilon\lambda}} = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}k\Delta l^2} = \left(\frac{A}{2A}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Β.2. Όλες οι σφαίρες του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ελαστικές και αρχικά είναι ακίνητες. Οι μάζες των σφαιρών συνδέονται με τη σχέση: $m_1 = m_2 = 4m_3$.



Στη σφαίρα μάζας m_3 δίνουμε αρχική ταχύτητα υ_o και οι κρούσεις που ακολουθούν είναι κεντρικές. Ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά είναι:

(α) 2

Για την πρώτη κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_3}{m_3 + m_2}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_o$$

$$\upsilon_3' = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_3' = -\frac{3}{5}\upsilon_o$$

Το Σ_3 αλλάζει φορά και με την ταχύτητα υ_3' συγκρούεται με το ακίνητο Σ_1, άρα για την δεύτερη κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_3}{m_3 + m_1}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = -\frac{6}{25}\upsilon_o$$

$$\upsilon_3'' = \frac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3'' = -\frac{3}{5}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3'' = \frac{9}{25}\upsilon_o$$

Το Σ_1 μετά τις παραπάνω δύο κρούσεις θα κινείται προς τα αριστερά και τα δύο άλλα σώματα προς τα δεξιά. Αφού $|\upsilon_2'| > |\upsilon_3''|$ δεν θα υπάρξει άλλη κρούση. Άρα θα πραγματοποιηθούν δύο κρούσεις συνολικά.

Β.3. Σφαίρα Α μάζας m κινούμενη με ταχύτητα υ συγκρούεται ελαστικά και έκκεντρα με ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Μετά την σύγκρουση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν την ίδια γωνία ϕ με την αρχική διεύθυνση κίνησης της σφαίρας Α. Η γωνία ϕ είναι ίση με:

(β) 45^o

Μετά την κρούση τα δύο σώματα θα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 2ϕ. Για την ελαστική κρούση ισχύουν:

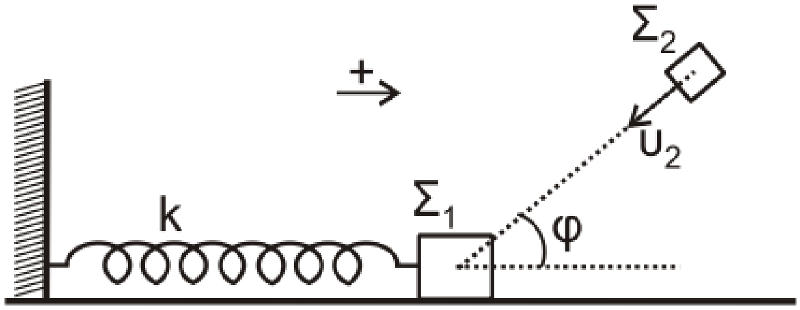
$$K_{\text{πριν}} = K_{\text{μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Rightarrow m\upsilon = \sqrt{(m\upsilon_1)^2 + (m\upsilon_2)^2 + 2(m\upsilon_1)(m\upsilon_2)\sigma\upsilon\nu(2\phi)}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu(2\phi) = 0 \Rightarrow 2\phi = 90^o$

Θέμα Γ

Σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 1kg$, είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους $A = 0,4m$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 έχει απομάκρυνση $x_1 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$, κινούμενο κατά τη θετική φορά, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 3kg$. Το σώμα Σ_2 κινείται, λίγο πριν την κρούση, με ταχύτητα $\upsilon_2 = 8m/s$ σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία



Σχήμα 3

ϕ (όπου $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{1}{3}$) με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει μετά την κρούση, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Γ.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος , αμέσως μετά την κρούση.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για το Σ_1 πριν την κρούση για να υπολογίσω την ταχύτητα του.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = +2m/s$$

Εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον άξονα x για να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$m_1\upsilon_1 - m\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\phi = (m_1 + m_2)\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = -1,5m/s$$

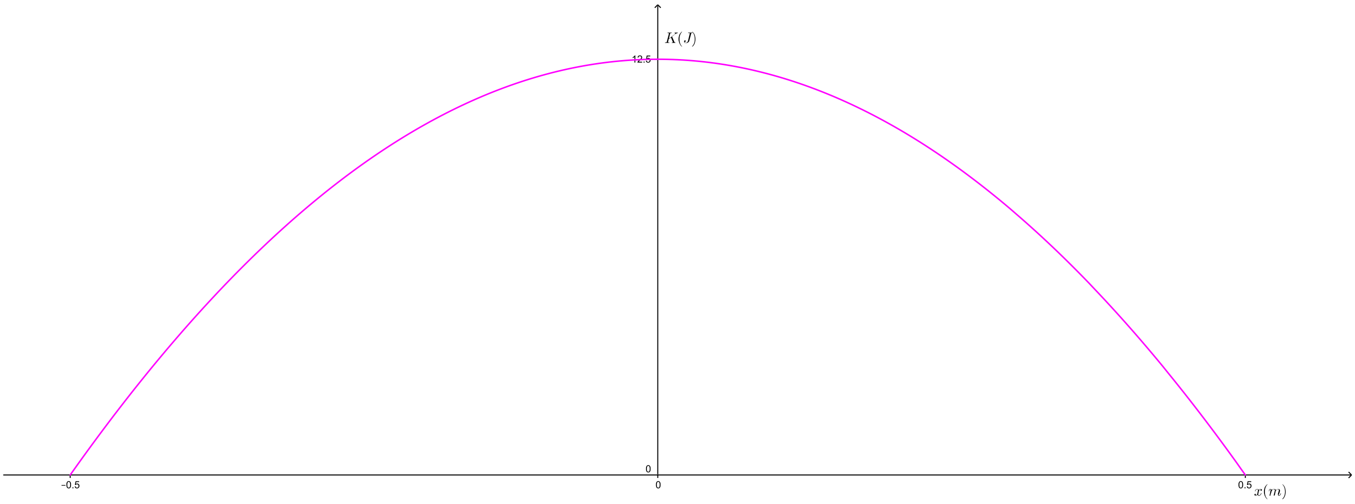
Άρα το συσσωμάτωμα έχει φορά προς τα αριστερά.

Γ.2 Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος .

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για το συσσωμάτωμα στην θέση ακριβώς μετά την κρούση, η οποία ταυτίζεται με την θέση πριν, αφού η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_k^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow A' = 0,5J$$

Γ.3 Να εκφράσετε την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση. Να σχεδιάσετε (με στυλό) σε βαθμολογημένους άξονες την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.



$$K = E - U = \frac{1}{2}DA'^2 - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow K = 12,5 - 50x^2 \ (S.I) \quad -0,5m \leq x \leq 0,5m$$

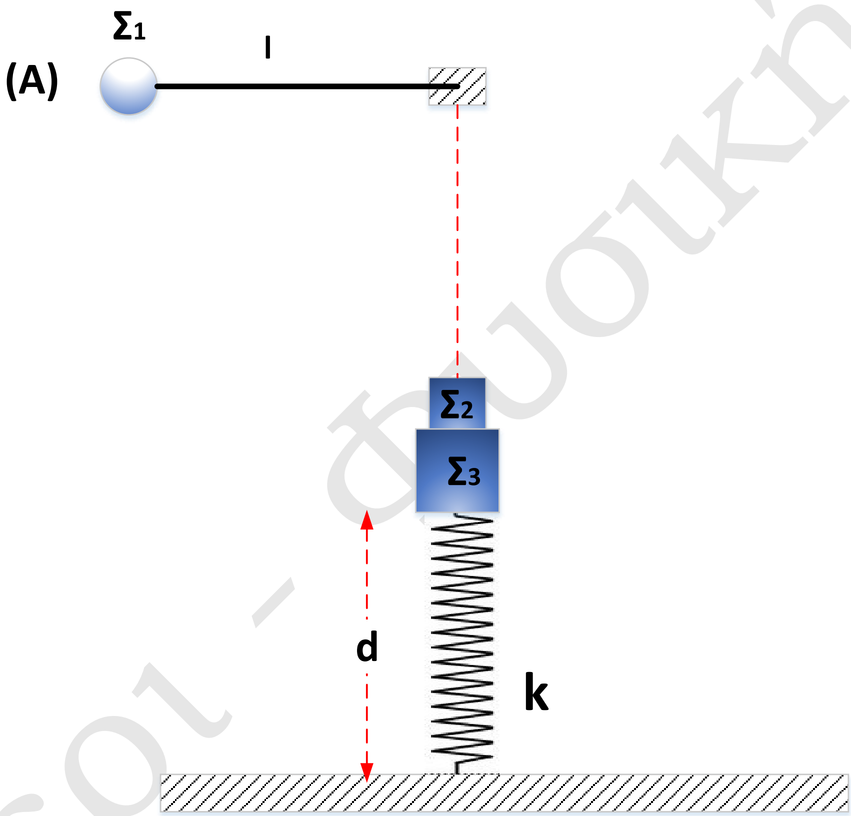
Γ.4 Να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2, ακριβώς πριν την κρούση που μετατράπηκε σε θερμότητα, κατά την κρούση.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} \cdot 100\% = \left[1 - \frac{K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}}\right] \cdot 100\% = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_k^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}\right] \cdot 100\% = \ldots$$

Θέμα Δ

Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ είναι δεμένο σώμα Σ_3, μάζας $m_3 = 4kg$. Πάνω στο Σ_3 και σε επαφή με αυτό βρίσκεται σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 6kg$ και το σύστημα ισορροπεί, ώστε το μήκος του ελατηρίου να είναι $d = 1,25m$. Σε ένα σημείο Ο πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα του ελατηρίου είναι δεμένο αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους $l = 0,8m$, στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχουμε στερεώσει σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2kg$. Εκτρέπουμε το νήμα φέρνοντας το Σ_1 σε οριζόντια θέση (Α) και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Όταν το Σ_1 φτάσει στην κατακόρυφη θέση συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ_2 και ταυτόχρονα κόβεται το νήμα.



Δ.1 Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση.

Για την κάθοδο του Σ_1 εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για να βρούμε την ταχύτητα του λίγο πριν την κρούση με το Σ_2:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g l \Rightarrow v_1 = 5m/s$$

Για την ελαστική κρούση ανάμεσα στα σώματα ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -2,5m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 2,5m/s$$

Δ.2 Να αποδείξετε ότι το Σ_3 μετά την κρούση θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.

Για την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_3 το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_o

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_o = m_3 g$$

Σε μια τυχαία θέση κάτω από την Θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = w - F_{\varepsilon\lambda} = m_3 g - k\left(\Delta l_o + x\right) = -kx$$

Άρα το σώμα εκτελεί αατ με σταθερά επαναφοράς την σταθερά του ελατηρίου. Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι:

$$D = k = m_3\omega^2 \Rightarrow \omega = 5rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}s$$

Δ.3 Θεωρώντας ως χρονική στιγμή $t_o = 0$ την στιγμή της κρούσης, αμελητέα την διάρκεια της και θετική την φορά προς τα πάνω να γράψετε την χρονική εξίσωση της Κινητικής ενέργειας του Σ_3

Στην αρχική ισορροπία των δύο σωμάτων το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_1

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_1 = (m_2 + m_3)g$$

Μετά την απομάκρυνση του Σ_2 το Σ_3 θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την αρχική θέση να είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης.

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta l_1 - \Delta l_o = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = 0,6m$$

Η ταλάντωση την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα ξεκινά από την θέση $y = -A$, άρα $\eta\mu\phi_o = -1 \Rightarrow \phi_o = \frac{3\pi}{2}$. Η ζητούμενη χρονική εξίσωση της Κινητικής ενέργειας στο $S.I.$ είναι:

$$K = \frac{1}{2}m_3 v^2 = \frac{1}{2}m_3 \left[\omega A \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_o\right)\right]^2 \Rightarrow K = 35\sigma\upsilon\nu^2\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Δ.4 Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ_3, όταν το μήκος του ελατηρίου είναι $d' = 2m$.

Στην παραπάνω θέση το σώμα βρίσκεται $2 - 1,25 = 0,75m$ πάνω από την κάτω ακραία θέση, άρα βρίσκεται σε απόσταση $0,15m$ πάνω από την ΘΙΤ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής θα είναι κατά μέτρο:

$$\frac{dP}{dt} = -Dy \Rightarrow |\frac{dP}{dt}| = 1,5kg \cdot m/s^2$$

Επανατοποθετούμε το Σ_2 πάνω στο Σ_3 και με την βοήθεια μιας μεταβλητής δύναμης τα εκτρέπουμε από την ισορροπία τους κατά d_o προς τα κάτω αφήνοντας τα ελεύθερα από την θέση αυτή.

Δ.5 Θεωρώντας ότι το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση , να υπολογίσετε την μέγιστη αρχική εκτροπή d_o ώστε τα δύο σώματα να μην χάνουν επαφή.

Σχεδιάζω το σύστημα των σωμάτων στην Θέση ισορροπίας τους και εν συνεχεία σε μια τυχαία θέση πάνω από την ΘΙΤ. Εκεί σχεδιάζω τις δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_2 και υπολογίζω την συνισταμένη των δυνάμεων πάνω του.

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow N - m_2 g = -m_2 \omega'^2 y \Rightarrow N = m_2 g - m_2 \omega'^2 y$$

Για να μην χάνεται η επαφή ανάμεσα στα σώματα πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow m_2 g - m_2 \omega'^2 y \geq 0 \Rightarrow g \geq \frac{k}{m_2 + m_3} y \Rightarrow y \leq 0.1m$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης (αρχική εκτροπή d_o) του σώματος θα πρέπει να είναι το πολύ μέχρι $0,1m$

Σημείωση:

Είναι προφανές ότι απαιτείται σχήμα για την επίλυση των θεμάτων, ειδικά εκείνων που έχουν ελατήρια. Για λόγους περιορισμένου χρόνου δεν τα παραθέτω στις λύσεις μου.