Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

1ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Μικρό σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο Τ και πλάτος Α. Μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της κινητικής του ενέργειας:

(γ) διανύει απόσταση 2Α σε χρόνο $\frac{T}{2}$

Α.2. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση επιδρά δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' - -bv$. Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους ταλάντωσης:

(δ) εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου ταλάντωσης και το σχήμα του ταλαντούμενου σώματος.

Α.3. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου από την Θέση ισορροπίας δίνεται σε συνάρτηση με τον χρόνο από την εξίσωση:

$$x = A\eta\mu(\omega t) + A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα $[0, \frac{T}{8}]$, όπου Τ η περίοδο της ταλάντωσης, είναι:

(α) $-\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

Α.4. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος Α παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ. Αν η απόσταση των δύο πηγών ισούται με 2λ, τότε μεταξύ των πηγών διέρχονται:

(δ) 3 υπερβολές ενίσχυσης και 4 υπερβολές απόσβεσης

Α.5.

(α) Όταν μια σφαίρα συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο, τότε το μέτρο της ορμής της σφαίρας παραμένει σταθερό. **Σωστό**

(β) Το φαινόμενο της παλίρροιας στον κόλπο του Fundy στον Καναδά οφείλεται στην εξαναγκασμένη ταλάντωση της μάζας του νερού στην επιφάνεια της γης εξαιτίας της βαρυτικής έλξης της σελήνης. **Σωστό**

(γ) Δύο σημεία ενός ελαστικού μέσου στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και ανάμεσα τους παρεμβάλλονται 3 δεσμοί, θα έχουν σε κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις. **Σωστό**

(δ) Φαινόμενα Συμβολής παρατηρούνται μόνο από κυματικές πηγές με ίδιες συχνότητες ταλάντωσης. **Σωστό**

(ε) Ο ήχος είναι ένα εγκάρσιο κύμα. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu(2\pi f_1 t) \qquad x_2 = A\eta\mu(2\pi f_2 t)$$

Οι συχνότητες f_1, f_2 των δύο ταλαντώσεων είναι είναι παραπλήσιες. Ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της συνιστάμενης ταλάντωσης, το σώμα έχει εκτελέσει N ταλαντώσεις. Διπλασιάζουμε ταυτόχρονα τις συχνότητες των δύο επιμέρους ταλαντώσεων, οι οποίες εξακολουθούν να παραμένουν παραπλήσιες. Για την νέα συνισταμένη ταλάντωση ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα, ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα είναι N'. Ο λόγος $\dfrac{N}{N'}$ ισούται με:

(β) 1

Από την αρχή της επαλληλίας θα προκύψει:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι: $T = \dfrac{1}{\bar{f}} = \dfrac{2}{f_1 + f_2}$.

Η περίοδος διακροτήματος θα είναι: $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$.

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που θα εκτελεί το σώμα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα είναι:

$$N = \frac{T_\delta}{T} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$$

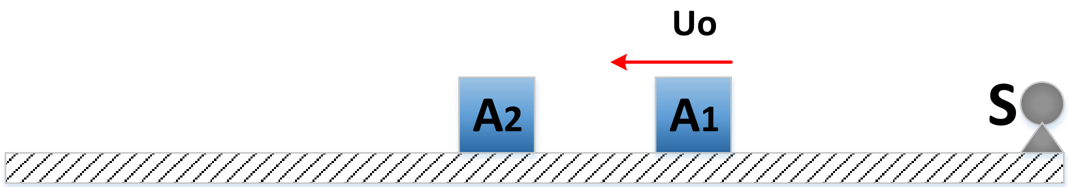
Μετά τον διπλασιασμό των δύο συχνοτήτων ο αριθμός θα είναι:

$$N' = \frac{T'_\delta}{T'} = \frac{2f_1 + 2f_2}{2|2f_1 - 2f_2|} \Rightarrow N' = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|} = N$$

Β.2. Σε λείο οριζόντιο δάπεδο ισορροπούν δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ αντίστοιχα. Τα δύο σώματα φέρουν σημειακούς ανιχνευτές ηχητικών κυμάτων A_1 και A_2 αντίστοιχα και μπορούν να κινούνται πάνω σε διεύθυνση που διέρχεται από σημειακή ηχητική πηγή.

Την χρονική στιγμή t_1 εκτοξεύω το Σ_1 με ταχύτητα μέτρου υ_o όπως φαίνεται στο σχήμα και οι ανιχνευτές καταγράφουν συχνότητες f_{A1} και f_{A2} για τις οποίες ισχύει ότι: $\dfrac{f_{A1}}{f_{A2}} = \dfrac{3}{4}$.

Στην συνέχεια τα σώματα θα συγκρουστούν κεντρικά και ελαστικά με την διάρκεια της κρούσης να θεωρείται αμελητέα. Σε μια χρονική στιγμή



t_2 αμέσως μετά την κρούση οι ανιχνευτές θα καταγράψουν νέες συχνότητες f'_{A1} και f'_{A2} για τις οποίες θα ισχύει:

$$\textbf{(α)}\frac{f'_{A1}}{f'_{A2}} = \frac{13}{10}$$

Πριν την κρούση ο ακίνητος ανιχνευτής 2 θα αντιλαμβάνεται συχνότητα $f_{A2} = f_s$ και ο κινούμενος ανιχνευτής 1 θα αντιλαμβάνεται συχνότητα $f_{A1} = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_o}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s$, άρα προκύπτει:

$$\frac{f_{A1}}{f_{A2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_o}{\upsilon_{\eta\chi}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \upsilon_o = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{4}$$

Μετά την ελαστική κρούση οι ανιχνευτές θα αποκτούν ταχύτητες υ'_1 και υ'_2 για τις οποίες ισχύει:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_o = -\frac{\upsilon_o}{3} = -\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{12}$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_o = \frac{2\upsilon_o}{3} = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{6}$$

Για τον ζητούμενο λόγο προκύπτει:

$$\frac{f'_{A1}}{f'_{A2}} = \frac{\frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon'_1}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s}{\frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon'_2}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s} = \frac{13}{10}$$

Β.3. Αρμονικό Κύμα, μήκους κύματος λ και πλάτους $A = \dfrac{\lambda}{4}$, διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ προς την θετική φορά του άξονα. Το υλικό σημείο Ο $(x = 0)$ θα εκτελεί ταλάντωση της μορφής $y_o = A\eta\mu(\omega t)$. Η μέγιστη απόσταση των υλικών σημείων K και Λ του μέσου, των οποίων οι θέσεις ισορροπίας έχουν τετμημένες x_K και $x_\Lambda = x_K + \dfrac{\lambda}{2}$ θα είναι:

(α) $\dfrac{\lambda\sqrt{2}}{2}$

Τα σημεία Κ και Λ απέχουν $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2}$ άρα θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης ($\Delta\phi = \omega\Delta t = \pi$), δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή θα έχουν αντίθετες απομακρύνσεις. Θα βρίσκονται στην μέγιστη δυνατή απόσταση την στιγμή που θα είναι στις ακραίες τους θέσεις. Η μέγιστη απόσταση θα είναι:

$$d_{max} = \sqrt{(2A)^2 + (\Delta x)^2} = \sqrt{\left(2\frac{\lambda}{4}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}$$

Θέμα Γ

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς την θετική φορά. Κάθε υλικό σημείο του μέσου που διεγείρεται ξεκινά την ταλάντωση του από την θέση ισορροπίας με ταχύτητα μέτρου $2\pi\ m/s$ και διέρχεται από αυτή 20 φορές κάθε 2 δευτερόλεπτα. Δίνεται επίσης ότι η ελάχιστη απόσταση δύο σημείων του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης είναι ίση με $1m$

Γ.1 Να υπολογίσετε το μήκος κύματος, την συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας 2 φορές σε κάθε ταλάντωση, άρα εκτελεί 10 ταλαντώσεις κάθε 2 δευτερόλεπτα, οπότε $f = 5Hz$. Η ταχύτητα διέλευσης από την ΘΙΤ θα είναι $v_{max} = \omega A \Rightarrow 2\pi = 2\pi f A \Rightarrow A = 0,2m$. Η ελάχιστη απόσταση δύο σημείων που ταλαντώνονται σε *αντίθεση φάσης είναι* $\frac{\lambda}{2} = 1m \Rightarrow \lambda = 2m$. *Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι* $\upsilon_\delta = \lambda f = 10m/s$.

Ένα δεύτερο πανομοιότυπο κύμα διαδίδεται στο ίδιο μέσο διάδοσης με αντίθετη φορά, έτσι ώστε την χρονική στιγμή $t_o = 0$ να συναντιέται με το πρώτο στο υλικό σημείο Ο ($x = 0$).

Γ.2 Να γραφτούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.

$$y_1 = 0,2\eta\mu\pi(10t - x) \quad (S.I)$$

$$y_1 = 0,2\eta\mu\pi(10t + x) \quad (S.I)$$

Γ.3 Να γραφτεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu\,(\pi x)\,\eta\mu\,(10\pi t) \quad (S.I)$$

Γ.4 Να βρεθεί το πλήθος των σημείων του ελαστικού μέσου που θα παραμένουν ακίνητα εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων μέχρι και την χρονική στιγμή $t_1 = 0,2s$

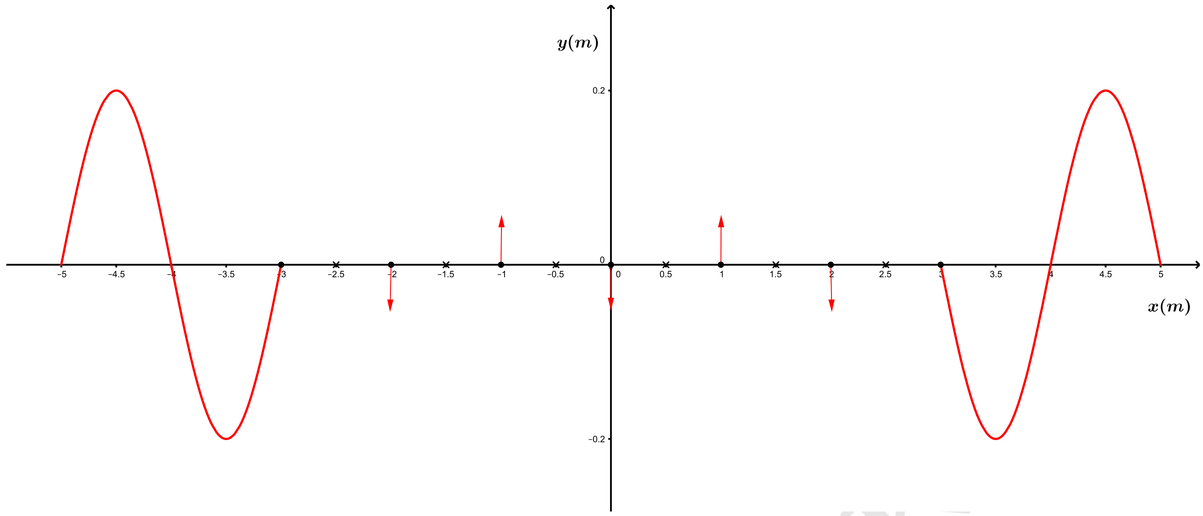
Μέχρι την χρονική στιγμή t_1 *έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στην περιοχή:*

$$-\upsilon_\delta t \leq x \leq -\upsilon_\delta t \Rightarrow -2m \leq x \leq 2m$$

Τα ακίνητα σημεία στην περιοχή θα είναι:

$$-2 \leq (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq (2\kappa + 1)\frac{1}{2} \leq 2 \Rightarrow -2,5 \leq \kappa \leq 1,5$$

Αφού το κ είναι ακέραιος αριθμός έχω 4 σημεία που παραμένουν ακίνητα.



Γ.5 Να σχεδιαστεί η μορφή του ελαστικού μέσου την χρονική στιγμή $t = 0.3s$ στην περιοχή $-5m \leq x \leq 5m$.

Την χρονική στιγμή $t = 0,3s$ έχω στάσιμο κύμα στην περιοχή $-3m \leq x \leq 3m$ και στο υπόλοιπο τμήμα της περιοχής έχω τα δύο τρέχοντα κύματα. Για την περιοχή που έχω στάσιμο κύμα όλα τα σημεία θα βρίσκονται στην Θέση ισορροπίας αφού $t = T + \frac{T}{2}$

Γ.6 Να βρεθεί η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή $t_1 = 0,2s$ για το υλικό σημείο Κ ($x_k = 2,25m$) του μέσου.

Την ζητούμενη χρονική στιγμή το στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί στην περιοχή $-2m \leq x \leq 2m$, άρα το σημείο Κ θα ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του κύματος που οδεύει προς την αρνητική κατεύθυνση.

$$y_k = y_2 = 0,2\eta\mu\pi(10 \cdot 0,2 + 2,25) = 0,1\sqrt{2}m$$

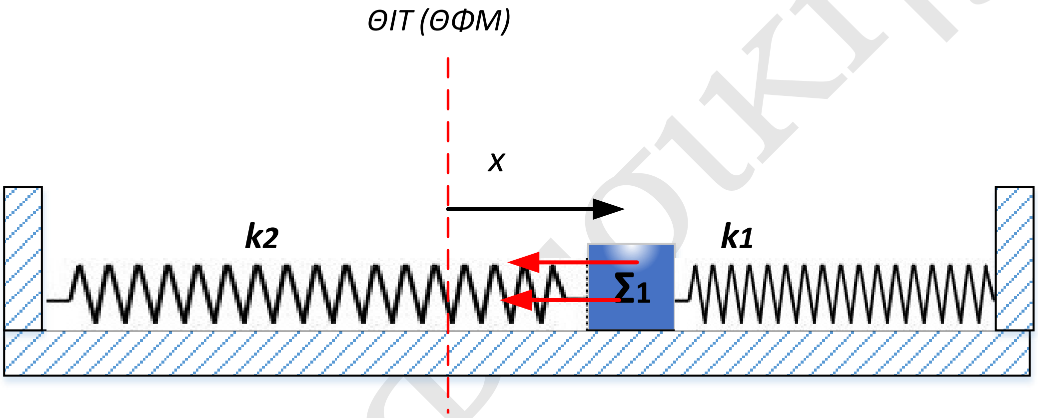
Θέμα Δ

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στα ελεύθερα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = k_2 = k = 50N/m$ τα οποία έχουν το ένα άκρο τους ακλόνητα στερεωμένο και βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος.

Εκτρέπω το σώμα από την ισορροπία, έτσι ώστε η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του κάθε ελατηρίου να γίνει $1J$ και την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το αφήνω ελεύθερο από την θέση αυτή.

Δ.1 Να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας ως θετική την φορά της αρχικής εκτροπής.

Σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας που είναι



και θέση φυσικού μήκους σχεδιάζω τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τα ελατήρια.

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x = -2kx$$

Άρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k = 100N/m$

Η αρχική εκτροπή είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta l = 0,2m$$

$$t_{=}0 \Rightarrow x = +A \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10 rad/s$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης στο $(S.I.)$ θα είναι:

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

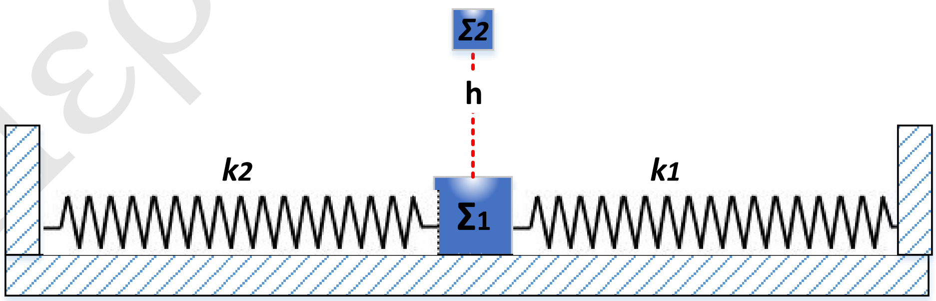
Δ.2 Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε μια χρονική στιγμή για τον οποία το σώμα διέρχεται επιταχυνόμενο από την θέση $x_1 = -0,1m$.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow v = \pm\sqrt{3}m/s$$

Αφού διέρχεται επιταχυνόμενο από μια αρνητική θέση, θα πρέπει να κινείται προς την ΘΙΤ, άρα η ταχύτητα θα είναι θετική. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής θα είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot v = +D \cdot x \cdot v = -10\sqrt{3}J/s$$



Δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$ αφήνεται να πέσει από ύψος h και πέφτει πάνω στο Σ_1, χωρίς να αναπηδήσει, όταν εκείνο διέρχεται από την θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά την θετική φορά. Το σύστημα των δύο σωμάτων συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Δ.3 Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος της νέας ταλάντωσης.

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον οριζόντιο άξονα, την στιγμή που το Σ_1 διέρχεται από την ΘΙΤ:

$$0 + m_1 \upsilon_{max} = (m_1 + m_2)\upsilon'_{max} \Rightarrow m_1 \omega A = (m_1 + m_2)\omega' A'$$

Επειδή $\omega' = \sqrt{\dfrac{D}{m_1 + m_2}} = 5rad/s$, *προκύπτει ότι το νέο πλάτος ταλάντωσης θα είναι* $A' = 0,1m$ *και η περίοδος* $T = 2\pi/5sec$

Δ.4 Να βρεθεί η εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων σε συνάρτηση με τον χρόνο. Να θεωρήσετε θετική την φορά προς τα δεξιά και $t_o = 0$ την στιγμή μετά την κρούση.

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx = -DA'\eta\mu\,(\omega' t + \phi'_o)$$

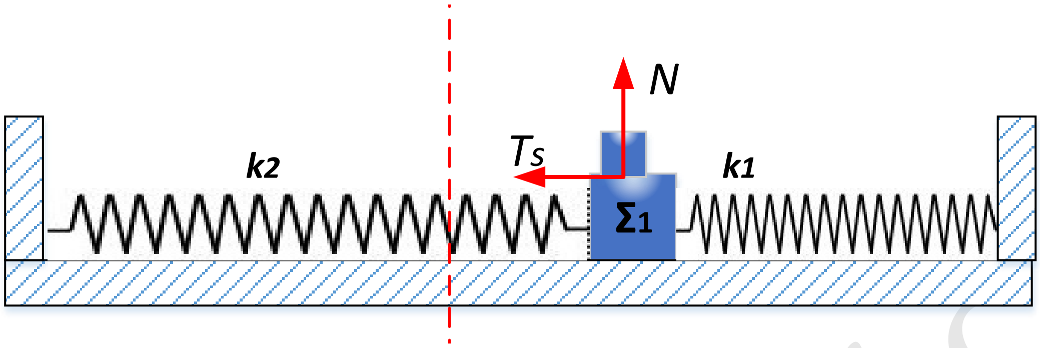
Η κρούση γίνεται στην ΘΙΤ και η ταχύτητα είναι θετική την $t = 0$ *,άρα* $\phi'_o = 0$ *, οπότε προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός σε συνάρτηση με τον χρόνο:*

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -10\eta\mu\,(5t) \quad (S.I.)$$

Δ.5 Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στα δύο σώματα, ώστε να παραμένουν σε επαφή σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης τους. *Το* Σ_2 *θα εκτελεί ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς* $D_2 = m_2\omega'^2$. *Η στατική τριβή θα παίζει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς.*

$$\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow -T_s = -m_2\omega'^2 x$$

Για να μην ολισθαίνει σε σχέση με το Σ_1 *πρέπει:*



$$T_s \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{T_s}{N} \Rightarrow \mu_s \leq \frac{m_2 \omega'^2 A'}{m_2 g} \Rightarrow \mu_{s(min)} = 0,25$$

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός