Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κύματα - Φαινόμενο Doppler

Ενδεικτικές Λύσεις

Σάββατο 17 Δεκέμβρη 2016

Θέμα Α

Α.1 Η συχνότητα ταλάντωσης μιας πηγής, που παράγει εγκάρσιο αρμονικό κύμα σε ένα ελαστικό μέσο, διπλασιάζεται χωρίς να μεταβληθεί το πλάτος της ταλάντωσης. Τότε

(γ) το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος υποδιπλασιάζεται.

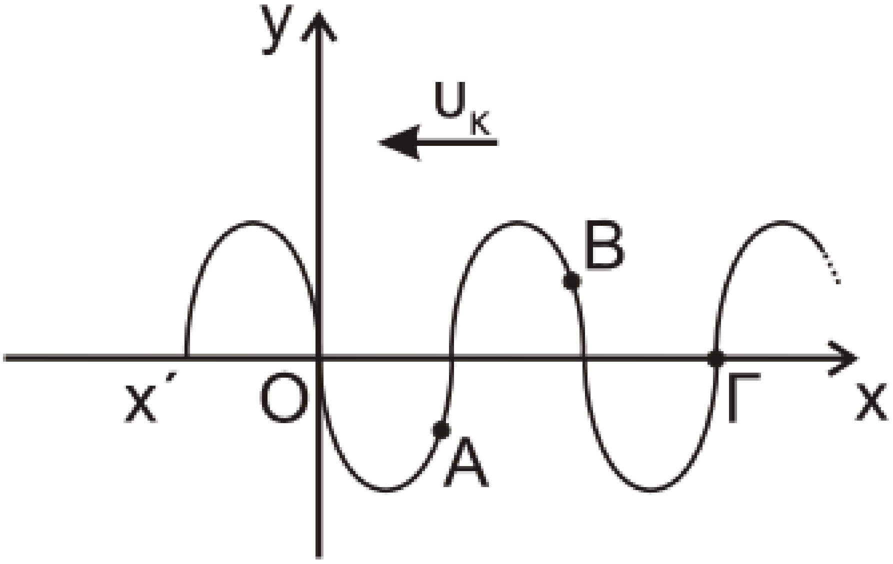
Α.2 Δύο όμοιες και σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων, χωρίς αρχική φάση, παράγουν κύματα στην ελεύθερη επιφάνεια ηρεμούντος υγρού. Τα κύματα έχουν περίοδο T και πλάτος A. Τα δύο κύματα φθάνουν σε σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού με χρονική διαφορά $\frac{3T}{4}$. Το σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος ίσο με:

(β) $A\sqrt{2}$

Α.3 Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα $x'Ox$ τη χρονική στιγμή t_1.

Για τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Α, Β και Γ ισχύει:

(γ) $V_A > 0 \quad V_B < 0 \quad V_\Gamma > 0$



Α.4 Ηχητική πηγή η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s και μήκους κύματος λ_s, κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μια ευθεία στην οποία υπάρχουν δύο ανιχνευτές Α και Β, κατευθυνόμενη από τον Α στον Β. Οι ανιχνευτές καταγράφουν συχνότητες f_A και f_B και μήκη κύματος λ_A και λ_B για τα οποία ισχύει:

(γ) $\lambda_A > \lambda_s > \lambda_B$ και $f_A < f_s < f_B$

Α.5

(α) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίδιο για κάθε σημείο μιας χορδής στην οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα. **Λάθος**

(β) Σε κάθε στάσιμο κύμα μεταφέρεται ενέργεια από ένα σημείο του ελαστικού μέσου σε άλλο. **Λάθος**

(γ) Η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται συμβολή. **Σωστό**

(δ) Το φαινόμενο Doppler αξιοποιείται από τους γιατρούς για την παρακολούθηση της ροής του αίματος. **Σωστό**

(ε) Εγκάρσια ονομάζονται τα κύματα στα οποία τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1 Μια πηγή ηχητικών κυμάτων όταν είναι ακίνητη παράγει ήχο συχνότητας f_s. Όταν ένας παρατηρητής πλησιάζει την ακίνητη πηγή με ταχύτητα μέτρου υ_A, η συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται είναι κατά 20% διαφορετική από την συχνότητα f_s. Στην περίπτωση που ο παρατηρητής είναι ακίνητος και η πηγή κινείται με ταχύτητα υ_s, για να αντιλαμβάνεται ο παρατηρητης για τον ήχο πάλι τη ίδια συχνότητα f_A, θα πρέπει η ταχύτητα υ_s να έχει κατεύθυνση προς τον παρατηρητή και μέτρο ίσο με:

(α) $\dfrac{5\upsilon_A}{6}$

Για την περίπτωση που πλησιάζει ο παρατηρητής την ακίνητη πηγή θα αντιλαμβάνεται ήχο μεγαλύτερης συχνότητας από αυτόν που η πηγή εκπέμπει.

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_s = 1,2 f_s \Rightarrow \upsilon_A = \frac{\upsilon}{5}$$

Στην περίπτωση που η πηγή πλησιάζει τον ακίνητο παρατηρητή:

$$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s = 1,2 f_s \Rightarrow \upsilon_s = \frac{\upsilon}{6}$$

Άρα προκύπτει η σωστή απάντηση

Β.2 Σε χορδή που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα $x'x$, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα που προέρχεται από τη συμβολή δύο απλών αρμονικών κυμάτων πλάτους A, μήκους κύματος λ και περιόδου T. Το σημείο Ο, που βρίσκεται στη θέση $x_o = 0$, είναι κοιλία και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση της απομάκρυνσής του. Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου M της χορδής που βρίσκεται $\dfrac{\lambda}{8}$ δεξιά της δεύτερης κοιλίας του θετικού ημιάξονα , είναι ίσο με:

(α) $\dfrac{2\sqrt{2}\pi A}{T}$

Η δεύτερη κοιλία του στάσιμου κύματος θα βρίσκεται στην θέση $x = \lambda$, άρα το σημείο Μ θα βρίσκεται στην θέση $x = \lambda + \frac{\lambda}{8} = \frac{9\lambda}{8}$, άρα η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του θα έχει μέτρο ίσο με:

$$\upsilon_{max} = \omega A' = \omega |2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)| = \frac{2\pi}{T}A\sqrt{2}$$

Β.3 Μια τεντωμένη χορδή μήκους L είναι ακλόνητα στερεωμένη στα δύο άκρα της και με κατάλληλη διέγερση δημιουργείται πάνω της στάσιμο κύμα. Αν η διέγερση της χορδής έχει συχνότητα f τότε 4 συνολικά σημεία της θα παραμένουν ακίνητα. Αν σας είναι γνωστό ότι η ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης για την δημιουργία στάσιμου κύματος στην χορδή είναιf_{min}, τότε ο λόγος της συχνότητας f προς την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης θα είναι:

$$\textbf{(β)}\ \frac{f}{f_{min}} = 3$$

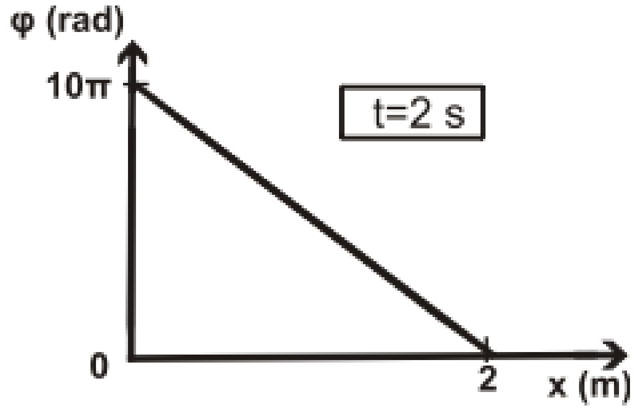
Στην πρώτη περίπτωση $L = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \frac{3\upsilon_\delta}{2f} = L$

Στην περίπτωση της ελάχιστης διέγερσης συνολικά δύο σημεία (τα άκρα) θα παραμένουν ακίνητα $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\upsilon_\delta}{2f_{min}} = L$

Άρα προκύπτει η σωστή απάντηση.

Θέμα Γ

Γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox ενός συστήματος συντεταγμένων. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το άκρο O ($x = 0$) του ελαστικού μέσου αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση εξίσωσης απομάκρυνσης $y = 0,1\eta\mu(\omega t)(S.I.)$, με αποτέλεσμα, τη χωρίς απώλειες ενέργειας, διάδοση στο ελαστικό μέσο ημιτονοειδούς εγκάρσιου κύματος. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x από το άκρο O, τη χρονική στιγμή $t = 2s$.



Γ.1 Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ, την περίοδο T του κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.

Το διάγραμμα περιγράφει την συνάρτηση $\phi = \omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda}$ *την στιγμή* $t = 2s$. *Το κύμα σε χρόνο* $2s$ *έχει διανύσει* $2m$*:*

$$\upsilon_\delta = \frac{x}{t} = \frac{2}{2} = 1m/s$$

$$10\pi = \omega \cdot 2 - 0 \Rightarrow \omega = 5\pi rad/s \Rightarrow 2\pi f = 5\pi \Rightarrow f = 2,5Hz \Rightarrow T = 0,4s$$

$$\upsilon_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,4m$$

Γ.2 Να γράψετε την εξίσωση του κύματος στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων.

$$y = 0,1\eta\mu\pi\left(5t - 5x\right) \quad (S.I.)$$

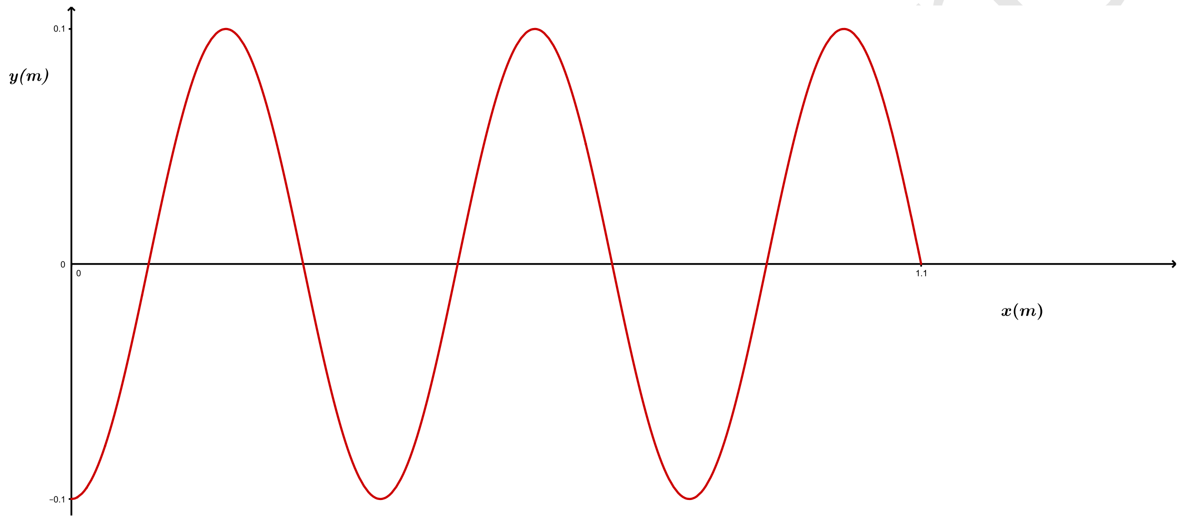
Γ.3 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου Κ του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση $x_\kappa = 1m$, τη χρονική στιγμή $t = 4s$.

Το σημείο Κ θα αρχίσει την ταλάντωση του την στιγμή $t = \dfrac{x}{\upsilon_\delta} = 1s$, *άρα την* $t = 4s$ *έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται.*

$$V = 5\pi \cdot 0,1\sigma\upsilon\nu\left(5\cdot 4 - 5\cdot 1\right) = -0.5\pi m/s$$

Γ.4 Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή $t = 1,1s$

Την χρονική στιγμή $t = 1,1s$ *το κύμα έχει διαδοθεί κατά* $x = \upsilon_\delta t = 1,1m = 2\lambda + \dfrac{3\lambda}{2}$



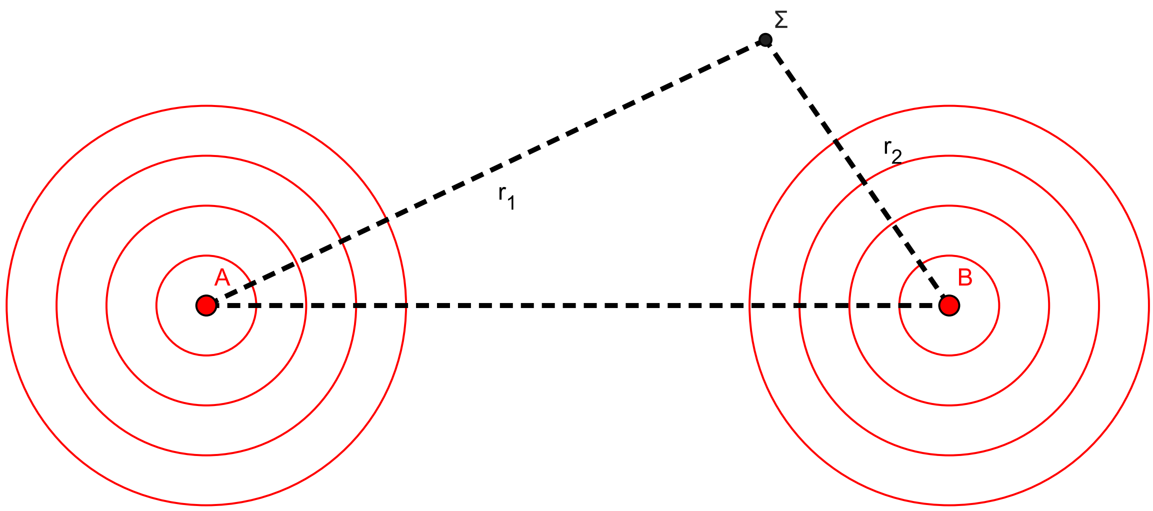
Γ.5 Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, που προκύπτει από τη συμβολή του αρχικού κύματος με ένα δεύτερο κύμα, ίδιας συχνότητας, ιδίου μήκους κύματος και ίδιου πλάτους με το αρχικό, το οποίο διαδίδεται στο ίδιο ελαστικό μέσο και περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}\right)$

$$y = 0.2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(5\pi t)\ (S.I)$$

Θέμα Δ

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα της επιφάνειας υγρού με (ΑΒ) = $d = 14m$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με εξίσωση απομάκρυνσης

$y = 0,2\eta\mu(\pi t)(S.I)$, δημιουργώντας εγκάρσια επιφανειακά κύματα μήκους κύματος $\lambda = 4m$, τα οποία συμβάλλουν στην επιφάνεια του υγρού. Ένα σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει $r_{1(\Sigma)} = 16m$ από την Π_1 και $r_{2(\Sigma)} = 12m$ από την Π_2.



Δ.1 Να υπολογίσετε την διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων που θα εκτελέσει το σημείο (Σ) εξαιτίας των δύο πηγών.

Το σημείο Σ εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις μετά την άφιξη των δύο κυμάτων σε αυτό οι οποίες θα είναι:

$$y_1 = A\eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}\right), \quad t \geq \frac{r_1}{\upsilon_\delta}$$

$$y_2 = A\eta\mu\left(\omega t - 2\pi\frac{r_2}{\lambda}\right) \quad t \geq \frac{r_2}{\upsilon_\delta}$$

Η διαφορά φάσης ανάμεσα στις παραπάνω ταλαντώσεις θα είναι:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2\pi rad$$

**Θα μπορούσα να δουλέψω και ως εξής:*

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = \omega(t_1 - t_2) = \omega\left(\frac{r_1}{\upsilon_\delta} - \frac{r_2}{\upsilon_\delta}\right)$$

Δ.2 Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του σημείο Σ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό.

Το σημείο Σ μετά την συμβολή θα εκτελεί δύο ταλαντώσεις σε συμφωνία φάσης αφού $\Delta\phi - 2\pi$. *Άρα θα είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, οπότε* $A' = 2A = 0,4m$

Βέβαια το πλάτος μπορεί να βρεθεί και με την χρήση της σχέσης για το πλάτος μετά την συμβολή:

$$A' = 2A|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)|$$

Δ.3 Να γράψετε την χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου Σ για $t \geq 0$ και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου.

Υπολογίζω τις δύο χρονικές στιγμές άφιξης των κυμάτων $t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon_\delta} = 8s$ *και* $t_1 = \dfrac{r_2}{\upsilon_\delta} = 6s$ *και γράφω την εξίσωση της ταλάντωσης του Σ. Η απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας μετά την συμβολή των κυμάτων θα δίνεται από την σχέση:*

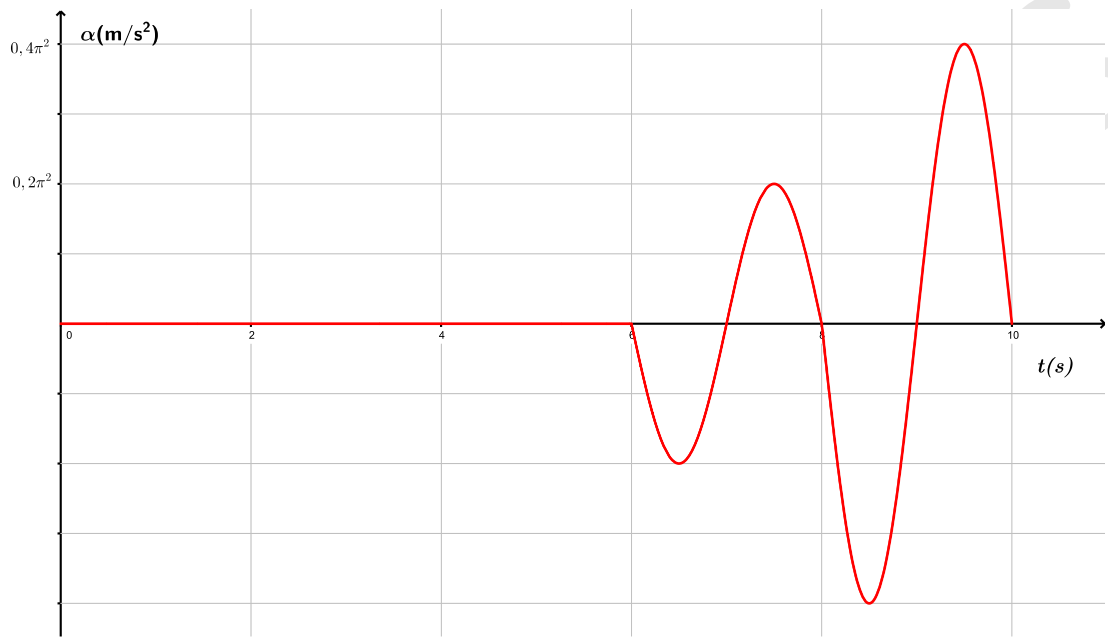
$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(ft - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

Άρα προκύπτουν:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 \leq t < 6s \\ -0,2\eta\mu\pi(t-6)\ (S.I.) & \text{για } 6s \leq t < 8s \\ -0,4\eta\mu\pi(t-7)\ (S.I.) & \text{για } t \geq 8s \end{cases}$$

Για την επιτάχυνση έχω ότι $y = -\omega^2 \cdot y$

$$a = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 \leq t < 6s \\ -0,2\pi^2 \eta\mu\pi(t-6)\ (S.I.) & \text{για } 6s \leq t < 8s \\ +0,4\pi^2 \eta\mu\pi(t-7)\ (S.I.) & \text{για } t \geq 8s \end{cases}$$



Δ.4 Να βρείτε το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος (ΑΣ) που θα παραμένουν διαρκώς ακίνητα μετά την συμβολή των κυμάτων σε αυτά.

Από το σημείο Σ διέρχεται υπερβολή ενισχυτικής συμβολής για την οποία ισχύει ότι: $r_1 - r_2 = 4 = \lambda$. *Θεωρώ ως σημείο Δ το σημείο του (ΑΒ) που τέμνει η παραπάνω υπερβολή ενισχυτικής συμβολής. Για τις αποστάσεις του Δ από τις δύο πηγές θα ισχύει:*

$$r_{1(\Delta)} - r_{2(\Delta)} = 4 \;\; \text{και} \;\; r_{1(\Delta)} - r_{2(\Delta)} = d = 14$$

Από το σύστημα προκύπτει ότι $r_{1(\Delta)} = 9m$ *και* $r_{2(\Delta)} = 5m$

Για να βρω το πλήθος υπερβολών απόσβεσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα (ΑΣ) αρκεί να βρω το πλήθος των υπερβολών απόσβεσης που *διέρχονται απο το (ΑΔ). Έστω ένα τυχαίο σημείο που βρίσκεται στο (ΑΔ) και είναι σημείο απόσβεσης για αυτό το σημείο έχω:*

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = (2N+1)2 \quad \text{και} \quad r_1 - r_2 = d = 14$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι: $r_1 = 2N + 8$ για ακέραιο Ν, όμως για να βρίσκεται το τυχαίο σημείο στο (ΑΔ) πρέπει:

$$0 < r_1 < r_{1(\Delta)} \Rightarrow 0 < 2N + 8 < 9 \Rightarrow -4 < N < 0,5 \Rightarrow N = -3, -2, -1, 0$$

Άρα έχω συνολικά 4 σημεία αποσβεστικής συμβολής, δηλαδή σημεία που θα παραμένουν ακίνητα.

Δ.5 Να υπολογίσετε την ελάχιστη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης των πηγών, ώστε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ να υποδιπλασιαστεί. Να θεωρήσετε ότι οι πηγές παραμένουν σύγχρονες.

$$A' = A = 2A|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda'}\right)| \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda'}\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\pi\frac{\lambda}{\lambda'} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{f'}{f} = 2k \pm \frac{1}{3} \Rightarrow f' = (2k \pm \frac{1}{3})f \quad k \in Z$$

ή

$$\pi\frac{\lambda}{\lambda'} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{f'}{f} = 2k \pm \frac{2}{3} \Rightarrow f' = (2k \pm \frac{2}{3})f \quad k \in Z$$

Άρα οι φυσικά επιτρεπτές τιμές για την συχνότητα ($f > 0$) μπορούν να είναι:

$$f' = \frac{f}{3}, \frac{2f}{3}, \frac{4f}{3}, \frac{5f}{3}, \frac{7f}{3}, \frac{8f}{3}, .$$

Η ελάχιστη μεταβολή της συχνότητα θα είναι

$$\Delta f_{min} = f' - f = \frac{2f}{3} - f = -\frac{f}{3}$$

ή

$$\Delta f_{min} = f' - f = \frac{4f}{3} - f = +\frac{f}{3}$$

Άρα αύξηση ή μείωση της συχνότητας κατά $\frac{f}{3} = \frac{1}{6} Hz$

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός