1ο Διαγώνισμα *Β Τάξης Ενιαίου Λυκείου*
Κυριακή 30 Οκτώβρη 2016
Φυσική Προσανατολισμού - Μηχανική - Ι

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1 Η εκτόξευση ενός σώματος μικρών διαστάσεων από ένα ύψος h με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$ είναι μια σύνθετη κίνηση η οποία μπορεί να αναλυθεί:

(β) Σε μια ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα και μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στον οριζόντιο άξονα.

Α.2 Ένα ελικόπτερο πετάει σε ύψος h, με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$ και κάποια χρονική στιγμή αφήνει να πέσει ένα δέμα Α. Την ίδια χρονική στιγμή ένα παιδί που βρίσκεται στην ταράτσα ενός κτηρίου ίδιου ύψους h αφήνει να πέσει ένα δεύτερο δέμα Β. Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα τότε:

(γ) Τα δύο δέματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

Α.3 Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σταθερής ακτίνας. Αν διπλασιαστεί ο χρόνος που απαιτείται για να πραγματοποιήσει έναν πλήρη κύκλο, τότε:

(γ) το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σώματος θα υποτετραπλασιαστεί

Α.4 Η κεντρομόλος δύναμη, που δέχεται ένα σώμα το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση:

(γ) εκφράζει την συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σώμα πάνω στην διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς.

Α.5

(α) Η Αρχή της Επαλληλίας αξιοποιείται για την μελέτη σύνθετων κινήσεων. **Σωστό**

(β) Η μηχανική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή μειώνεται κατά την κάθοδο του. **Λάθος**

(γ) Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει σταθερή ταχύτητα. **Λάθος**

(δ) Η περίοδος ιδιοπεριστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της είναι ίση με 1440 λεπτά. **Σωστό**

(ε) Στο πλανητικό μοντέλου του ατόμου το Ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή κυκλική Κίνηση γύρω από τον πυρήνα εξαιτίας της ηλεκτροστατικής έλξης. **Σωστό**

Θέμα Β

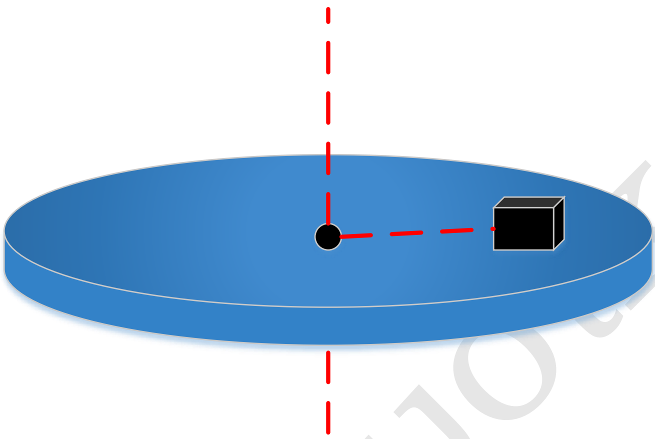
Β.1 Σώμα εκτοξεύεται από ύψος h την χρονική στιγμή $t_o = 0$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_o. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή και ίση με g και οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες τότε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος την χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με $\sqrt{2}\upsilon_o$. Η χρονική στιγμή t_1 θα είναι:

(β) $t_1 = \dfrac{\upsilon_o}{g}$

Το σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, άρα η ταχύτητα του την χρονική στιγμή t_1 *θα είναι:*

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_o^2 + (gt_1)^2} = \sqrt{2}\upsilon_o \Rightarrow 2\upsilon_o^2 = \upsilon_o^2 + g^2 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_o}{g}$$

Β.2 Δίσκος ακτίνας R στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ένα κιβώτιο μικρών διαστάσεων και μάζας m απέχει $\frac{R}{4}$ από την περιφέρεια του δίσκου και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση χωρίς να ολισθαίνει στην επιφάνεια του δίσκου.



Μέσω μιας γεννήτριας μπορούμε να αυξήσουμε την συχνότητα περιστροφής του δίσκου. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στο κιβώτιο και τον δίσκο είναι μ_s και η επιτάχυνση της βαρύτητας g τότε η μέγιστη συχνότητα με την οποία μπορεί να περιστρέφεται ο δίσκος, χωρίς να ολισθαίνει το κιβώτιο πάνω σε αυτόν είναι:

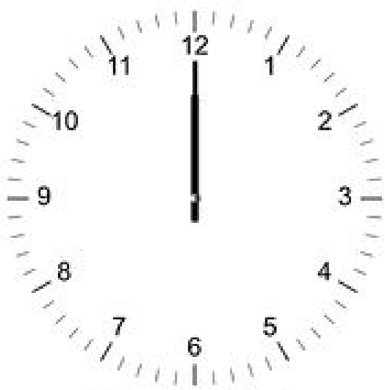
(α) $f_{max} = \sqrt{\dfrac{\mu_s g}{3\pi^2 R}}$

Το κιβώτιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $r = R - \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}$ με την στατική τριβή να παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$T_s = m\omega^2 r$$

Το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση όταν:

$$T_s \leq \mu_s N \Rightarrow m\omega^2 r \leq \mu_s m g \Rightarrow 4\pi^2 f^2 \frac{3R}{4} \leq \mu_s g \Rightarrow f^2 \leq \frac{\mu_s g}{3\pi^2 R}$$



Β.3 Το ρολόι του σχολείου σας δείχνει 12:00 το μεσημέρι.

(I) Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης του ρολογιού θα συναντηθούν για δεύτερη φορά σε χρονικό διάστημα Δt ίσο με:

(β) $\frac{24}{11}h$

Η περίοδος του ωροδείκτη είναι $T_\omega = 12h$ και του λεπτοδείκτη $T_\lambda = 1h$. Για να συναντηθούν για δεύτερη φορά πρέπει:

$$\theta_\lambda - \theta_\omega = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T_\lambda}t - \frac{2\pi}{T_\omega}t = 4\pi \Rightarrow t = \frac{2T_\omega T_\lambda}{T_\omega - T_\lambda} = ...$$

(II) Αν το μήκος του λεπτοδείκτη είναι διπλάσιο από το μήκος του ωροδείκτη, τότε ο λόγος των ταχυτήτων με την οποία κινούνται τα άκρα των δεικτών θα είναι:

(β) $\frac{\upsilon_\lambda}{\upsilon_\omega} = 24$

$$\frac{\upsilon_\lambda}{\upsilon_\omega} = \frac{\omega_\lambda r_\lambda}{\omega_\omega r_\omega} = \frac{T_\omega 2r_\omega}{T_\lambda r_\omega} = 24$$

Θέμα Γ

Ράβδος μήκους (ΑΒ) = $L = 4m$ έχει προσαρμοσμένα στα άκρα της σφαιρίδια με μάζες $m_1 = m_2 = m = 0,5kg$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται

σε κατακόρυφο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από σημείο **O**, εκτελώντας 30 περιστροφές κάθε λεπτό. Το σημείο **O** απέχει απόσταση $\frac{L}{4}$ από το κέντρο **K** της ράβδου.

Γ.1 Να υπολογιστεί η συχνότητα, η περίοδος και η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής του συστήματος. Να σχεδιαστεί το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας.

$$f = \frac{N}{t} = \frac{30}{60} \Rightarrow f = 0,5Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = \pi rad/s$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι κάθετο στην σελίδα με φορά προς τα έξω, καθώς το σύστημα θα περιστραφή αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.

Γ.2 Να υπολογιστεί ο λόγος της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου που βρίσκεται στο άκρο **A** προς την γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου που βρίσκεται στο άκρο **B**. Να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα διανύσματα.

$$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{\omega r_A}{\omega r_B} = \frac{(OA)}{(OB)} = 3$$

Τα διανύσματα είναι κάθετα στην ράβδο και εφαπτόμενα στην κυκλική τροχιά.

Γ.3 Να βρεθεί η γωνία περιστροφής της ράβδου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 10s$. Τι μήκος έχει διανύσει το σημείο **K** της ράβδου στο ίδιο χρονικό διάστημα ;

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = 10\pi rad$$

$$S_K = r_K \Delta\theta = (OK)\Delta\theta = 10\pi = 31,4m$$

(ή $S_K = \upsilon_K \Delta t = \omega r_K \Delta t$)

Γ.4 Να υπολογιστεί το μέτρο της επιτάχυνσης του σφαιριδίου που βρίσκεται στο άκρο **Α** της ράβδου και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάνυσμα.

Γενικά στο άκρο Α στην αρχική θέση υπάρχει η κεντρομόλος επιτάχυνση ($\Sigma F_K = m\alpha_K$) και η επιτρόχιος επιτάχυνση ($\Sigma F_\epsilon = m\alpha_\epsilon$) που είναι κάθετες μεταξύ τους.

$$\alpha = \sqrt{(\alpha_K)^2 + (\alpha_\epsilon)^2} = \sqrt{(\omega^2 r_A)^2 + 0^2} = 30m/s^2$$

** η επιτρόχια επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, αφού η κίνηση είναι ομαλή κυκλική το μέτρο της θα είναι μηδέν. Άρα η επιτάχυνση στο σημείο Α θα είναι ακτινική με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.*

Γ.5 Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται το σφαιρίδιο Α από την ράβδο στο ανώτερο και στο κατώτερο σημείο της κίνησης του κατά την διάρκεια της περιστροφής.

Στην ανώτερη θέση η δύναμη είναι ομόροπη με το βάρος:

$$\Sigma F_K = m\omega^2 r_A \Rightarrow F + mg = m\omega^2(OA) \Rightarrow F = 10N$$

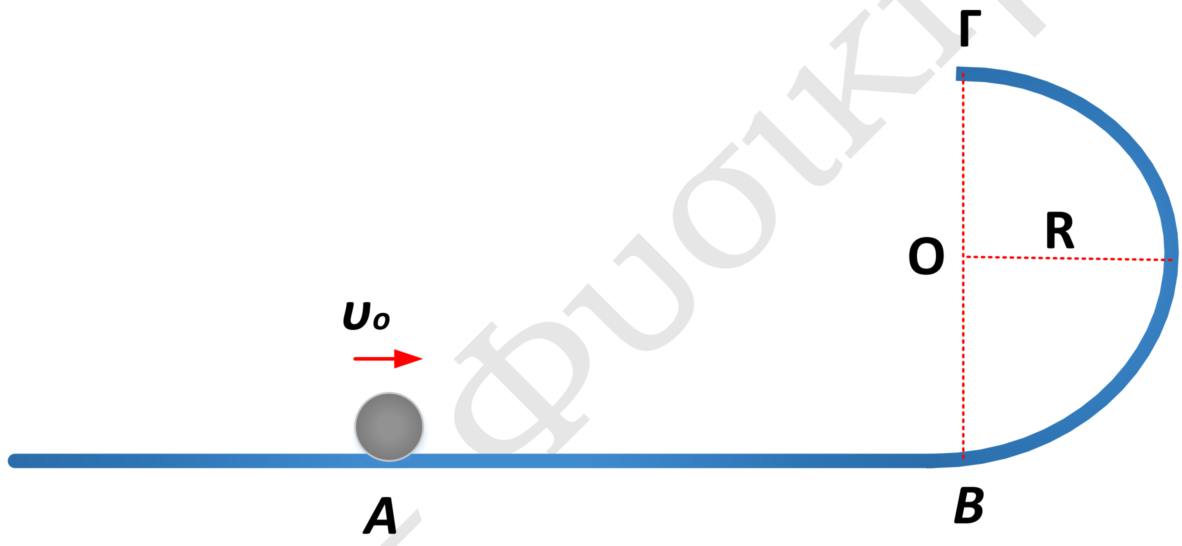
Στην ανώτερη θέση η δύναμη είναι αντίροπη με το βάρος:

$$\Sigma F_K = m\omega^2 r_A \Rightarrow F' - mg = m\omega^2(OA) \Rightarrow F' = 20N$$

** Αφού η κίνηση είναι ομαλή κυκλική η συνισταμένη των εφαπτομενικών δυνάμεων πρέπει να είναι μηδέν. Άρα κάνω την υπόθεση ότι η δύναμη που ασκείται στο σώμα από την ράβδο είναι ακτινική. Σε αυτό το επίπεδο διδασκαλίας του μαθήματος είναι μια καλή υπόθεση.*

Θέμα Δ

Σφαιρίδιο μάζας $m = 0,5kg$ εκτοξεύεται από σημείο **Α** ενός λείου οριζοντίου δαπέδου με ταχύτητα μέτρου υ_o. Το σφαιρίδιο στην πορεία του και αφού διανύσει διάστημα (ΑΒ) = $3m$ συναντά λείο ημικυκλικό κατακόρυφο οδηγό ακτίνας R. Το σφαιρίδιο μόλις που διέρχεται από το ανώτερο σημείο **Γ** του οδηγού χωρίς να χάνει επαφή με αυτόν. Στην συνέχεια εγκαταλείπει τον οδηγό ακολουθώντας παραβολική τροχιά και πέφτει σε ένα σημείο **Δ** του οριζοντίου δαπέδου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1s$



Δ.1 Να βρεθεί η ακτίνα R του οδηγού.

Το σώμα αφού εγκαταλείψει τον οδηγό εκτελεί οριζόντια βολή και φτάνει στο έδαφος σε χρόνο Δt από ύψος $h = 2R$

$$h = 2R = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \Rightarrow R = 2,5m$$

Δ.2 Να βρεθεί η απόσταση ανάμεσα στο σημείο εκτόξευσης Α και στο σημείο προσγείωσης Δ.

Το σώμα όταν φτάνει στην ανώτερη θέση του οδηγού εκτελεί κυκλική κίνηση και μόλις που δεν χάνει επαφή με αυτόν, η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται θα παίζουν τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Η ταχύτητα του εκεί είναι ίση με υ.

$$N + mg = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m\upsilon^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow \upsilon \geq \sqrt{gR} \Rightarrow \upsilon = 5m/s$$

Με την παραπάνω ταχύτητα θα πραγματοποιήσει την οριζόντια βολή. Η μέγιστη οριζόντια απόσταση της βολής θα είναι:

$$x = (B\Delta) = \upsilon\Delta t = 5m$$

Άρα:

$$(A\Delta) = (B\Delta) - (AB) = 2m$$

Δ.3 Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης υ_o.

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την άνοδο από την θέση Α μέχρι την θέση Γ

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -mg2R \Rightarrow \upsilon_o = 5\sqrt{5}m/s$$

Δ.4 Να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας του σφαιριδίου την στιγμή που φτάνει στο έδαφος.

Κατά την οριζόντια βολή φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ':

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon^2 + (gt)^2} \Rightarrow \upsilon' = 5\sqrt{5}m/s$$

** το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο γιατί σε όλη την διαδρομή από την αρχική μέχρι και την τελική θέση έχουμε Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, άρα η ταχύτητα εκτόξευσης υ_o θα είναι κατά μέτρο ίση με την ταχύτητα επιστροφής στο έδαφος υ'*

Η ταχύτητα υ' σχηματίζει γωνία θ με την ταχύτητα υ που εγκαταλείπει τον οδηγό.

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} = \frac{gt}{\upsilon} = 2$$

Δ.5 Να γραφτεί η εξίσωση της τροχιάς του σφαιριδίου $y = f(x)$ θεωρώντας ως αρχή των αξόνων το σημείο Γ.

Για την οριζόντια βολή έχουμε: $y = \frac{1}{2}gt^2$ *και* $x = \upsilon t$

$$y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{5}\ (S.I.)\ \ 0m \leq x \leq 5m$$

Δ.6 Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σφαιριδίου όταν έχει διαγράψει γωνία 90^o στον ημικυκλικό οδηγό. **ερώτημα- bonus**

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για να βρώ την ταχύτητα υ'' *του σώματος όταν διέρχεται από την παραπάνω θέση.*

$$\frac{1}{2}m\upsilon''^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -mgR \Rightarrow \upsilon'' = 5\sqrt{3}m/s$$

Στο σημείο αυτό υπάρχει η κεντρομόλος επιτάχυνση ($\Sigma F_K = m\alpha_K$*) και η επιτρόχιος επιτάχυνση (*$\Sigma F_\epsilon = m\alpha_\epsilon \Rightarrow mg = m\alpha_\epsilon$*) που είναι κάθετες μεταξύ τους.*

$$\alpha = \sqrt{(\alpha_K)^2 + (\alpha_\epsilon)^2} = \sqrt{(\frac{m\upsilon''^2}{R})^2 + g^2} = 5\sqrt{13}m/s^2$$