Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*
Απλή Αρμονική Ταλάντωση Ι - Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Μια μικρή σφαίρα προσκρούει ελαστικά στην επίπεδη επιφάνεια ενός κατακόρυφου τοίχου. Αν η σφαίρα κτυπήσει πλάγια στην επιφάνεια, τότε:

(β) η κινητική της ενέργεια διατηρείται.

Α.2. Μια σφαίρα μάζας m συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με δεύτερη σφαίρα διαφορετικής μάζας και η κινητική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών μετατρέπεται εξολοκλήρου σε θερμότητα. Άρα, οι σφαίρες πριν την κρούση έχουν αντίθετες

(β) ορμές

Α.3. Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει την ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με τον χρόνο.

(γ) Την χρονική στιγμή t_4 η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος είναι μέγιστη.

Α.4. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται δίνεται από την σχέση $\upsilon = \omega A \eta\mu\omega t$. Τότε η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας δίνεται από την σχέση:

(δ) $x = A\eta\mu\left(\omega t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$

A.5.

(α) Η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχει φορά πάντα προς τη θέση ισορροπίας του σώματος. **Σωστό**

(β) Σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση τα μεγέθη πλάτος, μέγιστη επιτάχυνση και κινητική ενέργεια παίρνουν μόνο θετικές τιμές. **Σωστό**

(γ) Μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. **Λάθος**

(δ) Στις ανελαστικές κρούσεις δεν διατηρείται η ορμή. **Λάθος**

(ε) Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. **Σωστό**

Θέμα Β

B.1. Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ εκτελούν ανεξάρτητες ταλαντώσεις για τις οποίες δίνεται το κοινό διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Αν F_1 και F_2 είναι το μέτρο της δύναμης επαναφοράς για το Σ_1 και το Σ_2 αντίστοιχα στην θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας για την κάθε ταλάντωση, τότε:

$$\textbf{(γ)}\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}$$

Από το διάγραμμα προκύπτουν:

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1$$

$$\upsilon_{max(1)} = 2\upsilon_{max(2)} \Rightarrow \omega_1 A_1 = 2\omega_2 A_2 \Rightarrow A_1 = 4A_2$$

Άρα προκύπτει:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{D_1 A_1}{D_2 A_2} = \frac{m_1\omega_1^2 A_1}{m_2\omega_2^2 A_2} = \frac{1}{2}$$

Β.2. Τρία όμοια ελαστικά σφαιρίδια Σ_1 , Σ_2, Σ_3 έχουν μάζες m_1 , m_2, m_3 με $m_1 = m_2 = m_3 = m$ και είναι δεμένα στα κάτω άκρα τριών μη ελαστικών νημάτων ίσου μήκους l, με το πάνω άκρο τους στερεωμένο στην οροφή.

Τα τρία σφαιρίδια εφάπτονται μεταξύ τους και τα κέντρα τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ανυψώνουμε το σφαιρίδιο Σ_1, ώστε το νήμα του να γίνει οριζόντιο και το αφήνουμε να κινηθεί ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα. Το σφαιρίδιο Σ_3 θα ανέλθει σε ύψος h για το οποίο:

(γ)$h = l$

Ανυψώνοντας το σφαιρίδιο Σ_1 κατά l από την αρχική του θέση του προσφέρουμε δυναμική βαρυτική ενέργεια $E_{αρχ} = mgl$. 'Οταν το αφήνουμε η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε κινητική. Επειδή κάθε κρούση είναι ελαστική και τα σφαιρίδια έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάσσουν κινητικές ενέργειες μεταξύ τους με αποτέλεσμα όλη η αρχική ενέργεια να μεταβιβαστεί στο Σ_3. Το Σ_3 ανυψώνεται σε ύψος $h = l$, αφού η ενέργεια που έχει αποκτήσει είναι η $E_{αρχ}$.

Εναλλακτικά *η άσκηση μπορεί να λυθεί και ως εξής:*

- Κίνηση του Σ_1: $\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = mgl \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gl}$
- Πρώτη κρούση: $\upsilon_1' = 0, \upsilon_2' = \upsilon_1$
- Δεύτερη κρούση: $\upsilon_2'' = 0, \upsilon_3' = \upsilon_1$
- Ανύψωση του Σ_3 :$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = mgh \Rightarrow mgl = mgh \Rightarrow h = l$

Β.3. Σε μια πλαγιομετωπική σύγκρουση δύο αυτοκινήτων 1,2, που κινούνται σε κάθετους δρόμους, δημιουργείται συσσωμάτωμα, το οποίο αποκτά κοινή ταχύτητα V που σχηματίζει γωνία $\theta = 45^o$ με την διεύθυνση κίνησης του αυτοκινήτου 1.

Ο εμπειρογνώμονας ζυγίζει τα αυτοκίνητα και βρίσκει ότι το αυτοκίνητο 2 είναι κατά 20% βαρύτερο από το 1. Αν υ_1 και υ_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των αυτοκινήτων 1 και 2 αντίστοιχα πριν την σύγκρουση τότε:

$$\textbf{(β)}\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} > 1$$

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή διατήρησης της ορμής σε κάθε άξονα αφού αναλύσω την ταχύτητα του συσσωματώματος σε δύο κάθετες συνιστώσες.

- Άξονας x : $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V_x$
- Άξονας y : $m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V_y$

Η γωνία που μας δίνεται:

$$\epsilon\phi 45 = \frac{V_y}{V_x} = 1 \Rightarrow \frac{m_2\upsilon_2}{m_1\upsilon_1} = 1 \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1} > 1$$

**Αφού το αυτοκίνητο 2 είναι βαρύτερο από το 1* $m_2 > m_1$

Θέμα Γ

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 βρίσκεται στο σημείο Α λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου $(\hat{A\Gamma})$. Η ακτίνα ΟΑ είναι οριζόντια και ίση με $R = 5m$. Το σώμα αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου. Φθάνοντας στο σημείο Γ του τεταρτοκυκλίου, το σώμα συνεχίζει την κίνησή του σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$. Αφού διανύσει διάστημα $S_1 = 3,6m$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά στο σημείο Δ με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3m_1$, το οποίο τη στιγμή της κρούσης κινείται αντίθετα ως προς το Σ_1, με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 4m/s$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

Γ.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 στο σημείο Γ, όπου η ακτίνα ΟΓ είναι κατακόρυφη.

Εφαρμόζουμε για την κάθοδο στο ημικύκλιο το ΘΜΚΕ :

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = m_1 g R \Rightarrow \upsilon_o = 10m/s$$

Γ.2 Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Το σώμα κινείται οριζόντια με την επίδραση της Τριβής για την οποία ισχύει ότι: $T = \mu N = \mu m_1 g$, εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του μέχρι το σημείο Δ

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_o^2 = -\mu m_1 g S_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 8m/s$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = -10m/s \Rightarrow |\upsilon_1'| = 10m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2m/s$$

Προσοχή για να έχω το σωστό αποτέλεσμα αντικαθιστώ την υ_2 με την αλγεβρική της τιμή που είναι αρνητική λόγω της φοράς κίνησης.

Γ.3 Δίνεται η μάζα του σώματος Σ_2 $m_2 = 3kg$. Να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 κατά την κρούση και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της.

$$\Delta\vec{P}_2 = \vec{P}_2' - \vec{p}_2 \Rightarrow \Delta P_2 = 18kg \cdot m/s$$

Η φορά της μεταβολής είναι προς τα δεξιά, αφού την έχω λάβει ως θετική φορά.

Γ.4 Να υπολογίσετε το ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 κατά την κρούση.

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} \cdot 100\% = 56,25\%$$

Θέμα Δ

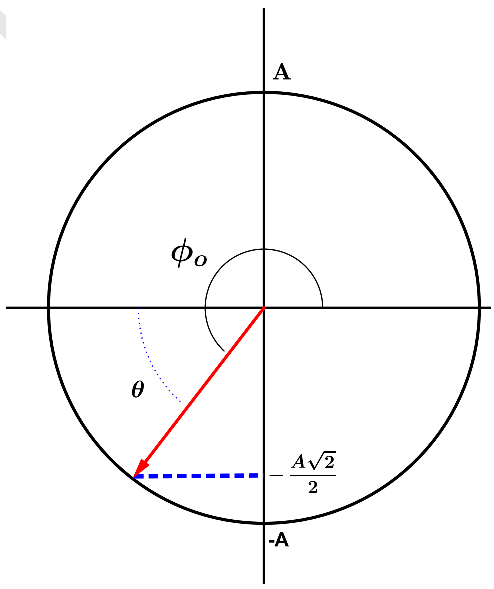
Σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 0,2kg$ πραγματοποιεί 6 ταλαντώσεις το δευτερόλεπτο ανάμεσα σε δύο ακραίες θέσεις που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 1m$. Την χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t_o = 0$ η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και το σώμα επιβραδύνεται με αρνητική ταχύτητα.

Δ.1 Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $d = 2A \Rightarrow A = 0,5m$. *Το σώμα έχει συχνότητα ταλάντωσης* $6Hz$ *και γωνιακή συχνότητα* $\omega = 2\pi f = 12\pi rad/s$. *Επίσης για την χρονική στιγμή* $t_o = 0$ *θα ισχύει:*

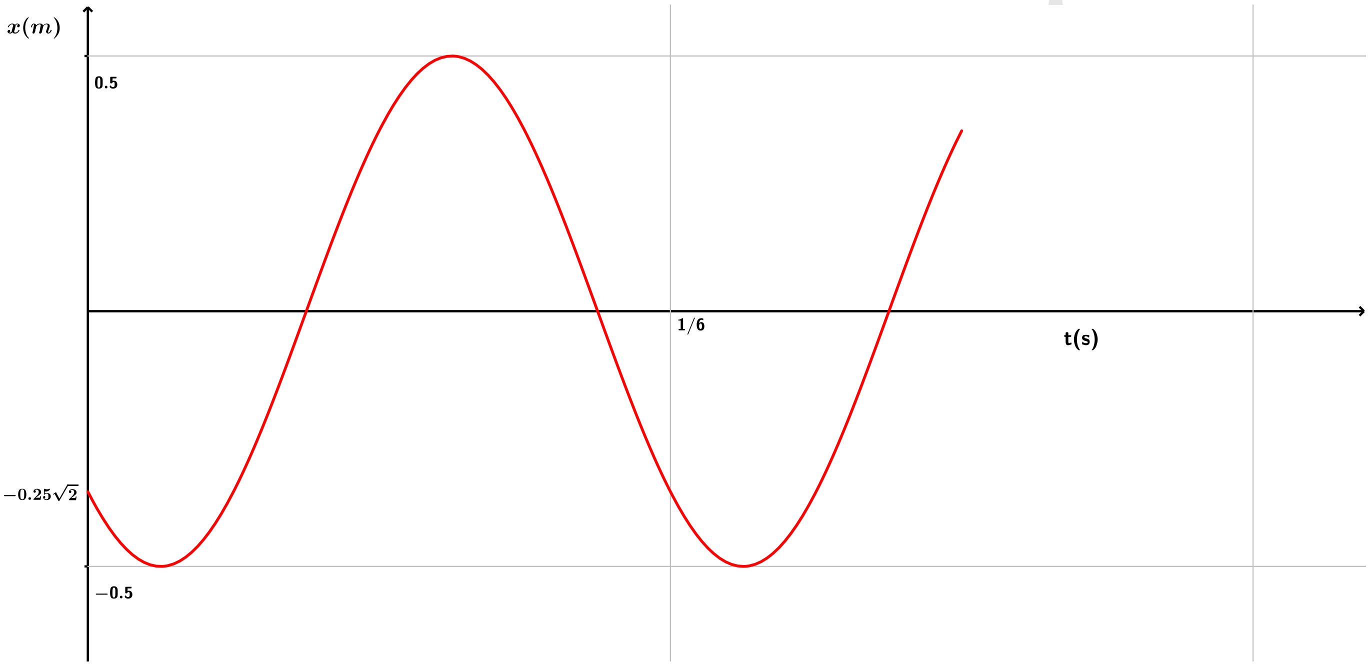
$$K = U \Rightarrow E = K + U = 2U \Rightarrow x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Αφού το σώμα επιβραδύνεται θα πρέπει να κινείται προς ακραία θέση. Με δεδομένο ότι έχει αρνητική ταχύτητα θα πρέπει να βρίσκεται σε θέση αρνητικής απομάκρυνσης. Άρα για $t_o = 0$, $x = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$ *και* $\upsilon < 0$. *Μπορώ τώρα να υπολογίζω την αρχική φάση.*



$$\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi_o = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

**Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε αρχική φάση με χρήση εξισώσεων.*

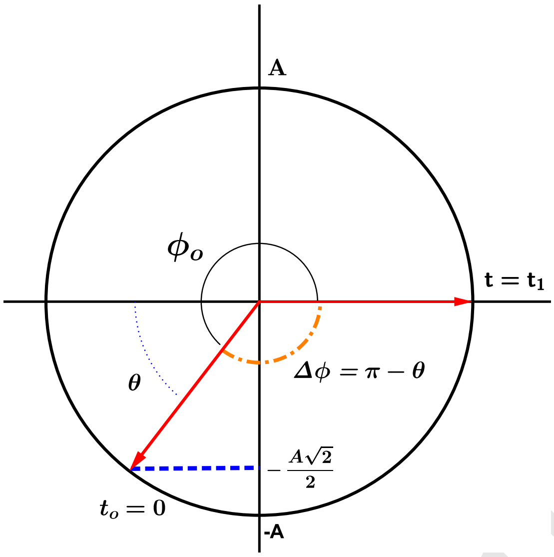


Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται:

$$x = 0,5\eta\mu\left(12\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)\ (S.I)$$

Δ.2 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$ από την θέση στην οποία η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη.

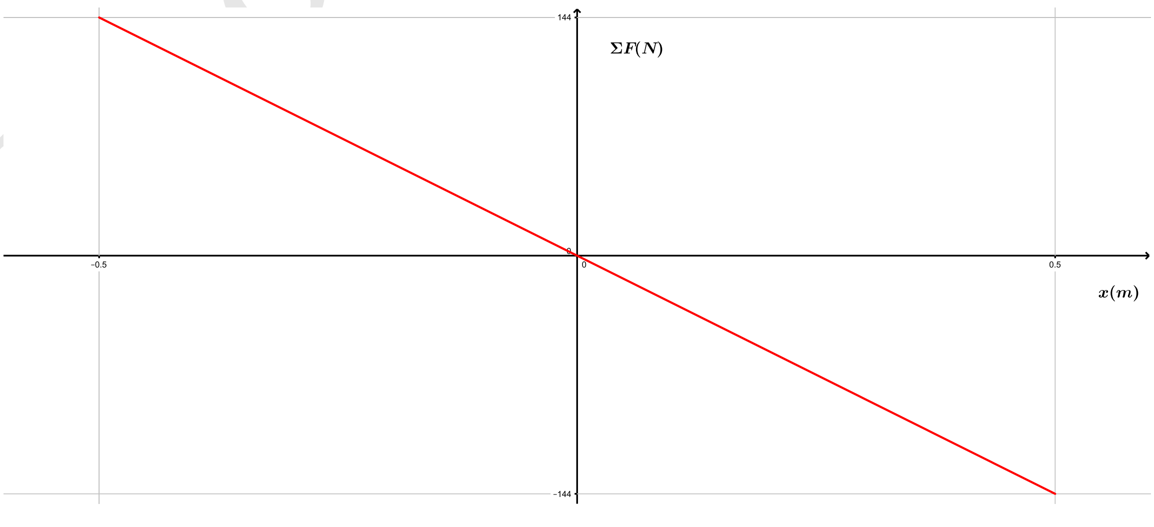
Η θέση μέγιστης κινητικής ενέργειας είναι η Θέση ισορροπίας. Διέρχεται για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$ από την ΘΙΤ με θετική ταχύτητα. Ο υπολογισμός μπορεί εύκολα να γίνει με χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος.



$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi - \pi/4}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{16} s$$

** Η Λύση μπορεί να γίνει και με επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων θέτοντας όπου $x = 0$ στην εξίσωση της απομάκρυνσης και κρατώντας τον μικρότερο χρόνο.*

Δ.3 Να γράψετε την δύναμη επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες το αντίστοιχο διάγραμμα.



Η δύναμη επαναφοράς θα δίνεται από την σχέση

$$\Sigma F = -Dx = -m\omega^2 x \Rightarrow \Sigma F = -288x\ (S.I.)\ \ -0,5m \leq x \leq 0.5m$$

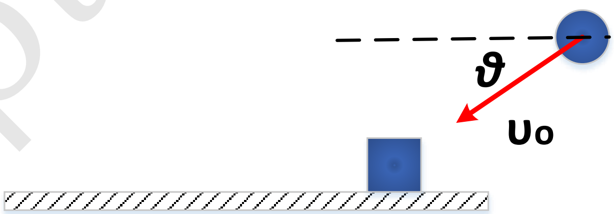
Δ.4 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από την θέση $x = 0,25\sqrt{3}m$ για πρώτη φορά.

Με την χρήση της ΑΔΕΤ υπολογίζω την ταχύτητα του σώματος την παραπάνω χρονική στιγμή.

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow v = +\omega\sqrt{A^2 - x^2} = 3\pi m/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F v = Dxv = 216\sqrt{3}\pi J/s$$

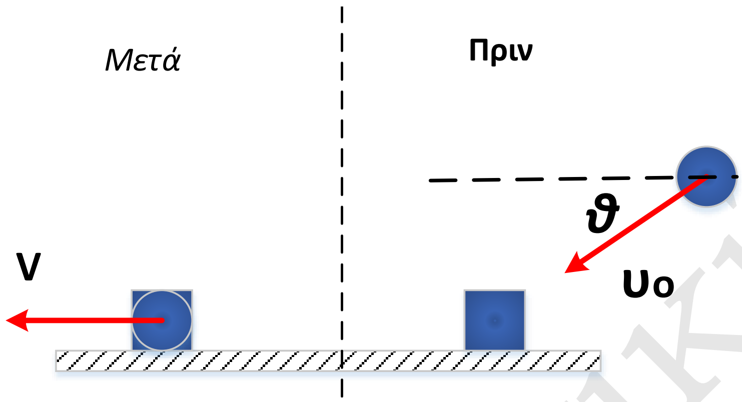
Δ.5 Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από την ακραία θετική του θέση ένα δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = \dfrac{m_1}{2}$ που κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο με ταχύτητα v_o που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση σφηνώνεται στο ταλαντούμενο σώμα.



Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Να δείξετε ότι το μέτρο της μεταβολής της ορμής του δεύτερου σώματος εξαιτίας της κρούσης θα είναι ίσο με:

$$|\Delta P_2| = \frac{m_2 v_o}{3}\sqrt{9 - 5\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Για την πλάγια κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της ορμής μόνο για τον οριζόντιο άξονα. Με την εφαρμογή της υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.



$$m_2\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta = (m_1+m_2)V \Rightarrow V = \frac{\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta}{3}$$

Η ζητούμενη μεταβολή της ορμής θα είναι:

$$\Delta P_2 = \sqrt{(\Delta P_{2x})^2 + (\Delta P_{2y})^2} = \sqrt{(m_2V - m_2\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (0 - m_2\upsilon_o\eta\mu\theta)^2} \Rightarrow$$

$$\Delta P_2 = m_2\sqrt{\left(\frac{\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta}{3} - \upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2 + (\upsilon_o\eta\mu\theta)^2} = m_2\upsilon_o\sqrt{\frac{4}{9}\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta} \Rightarrow$$

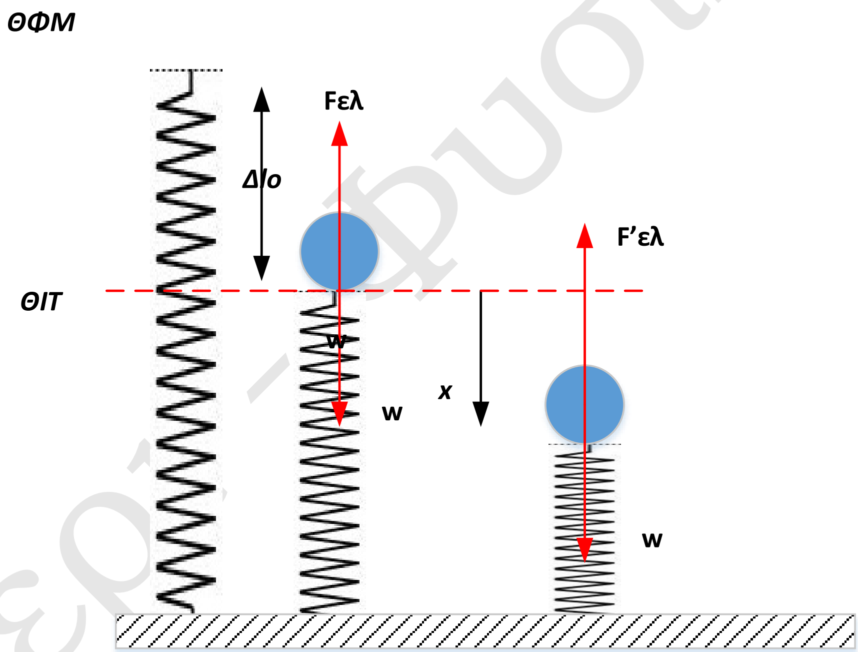
$$\Delta P_2 = m_2\upsilon_o\sqrt{\frac{4}{9}\sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta} \Rightarrow \Delta P_2 = \frac{m_2\upsilon_o}{3}\sqrt{9 - 5\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

**Προσοχή σε αυτή την κρούση δεν ισχύει* $\Delta P_1 = -\Delta P_2$

Θέμα Δ - *για όσους έχουν διδαχθεί ελατήρια*

Σώμα μάζας $m = 1kg$ ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ που έχει το άλλο άκρο του ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο. Μετακινούμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω συσπειρώνοντας επιπλέον το ελατήριο κατά $d = 0,2\sqrt{3}m$. Την χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t_o = 0$ προσδίδουμε στο σώμα κατακόρυφη ταχύτητα v_o με φορά προς τα κάτω.

Δ.1 Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.



- Για την Θέση ισορροπίας: $\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta_o = mg$
- Για την τυχαία θέση: $\Sigma F = mg - k(\Delta l_o + x) = -kx$

Άρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.
Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}s$$

Αν σας είναι γνωστό ότι η ενέργεια που προσφέραμε στο σώμα για να εκτελέσει την ταλάντωση είναι $8J$ τότε:

Δ.2 Αφού υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας υ_o, να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

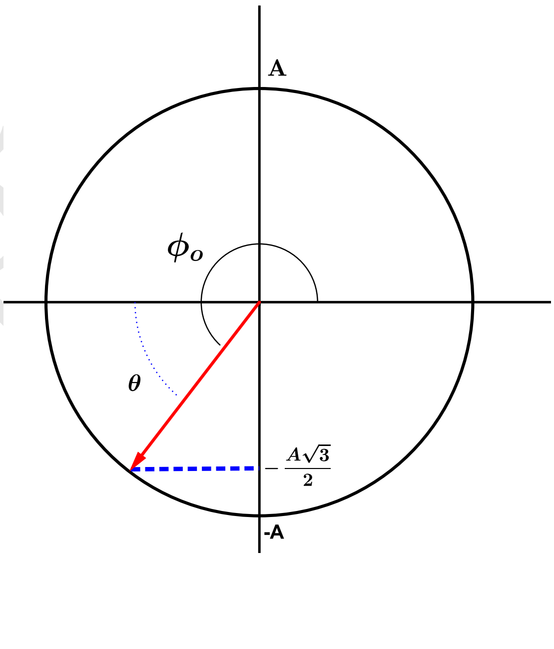
Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ την στιγμή της εκτόξευσης:

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + \frac{1}{2}Dd^2 \Rightarrow \upsilon_o = 2m/s$$

Από την ενέργεια βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 0,4m$$

Η αρχική φάση θα υπολογιστεί με την χρήση της αναπαράστασης περιστρεφόμενου διανύσματος:



$$\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \phi_o = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}rad$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης θα είναι:

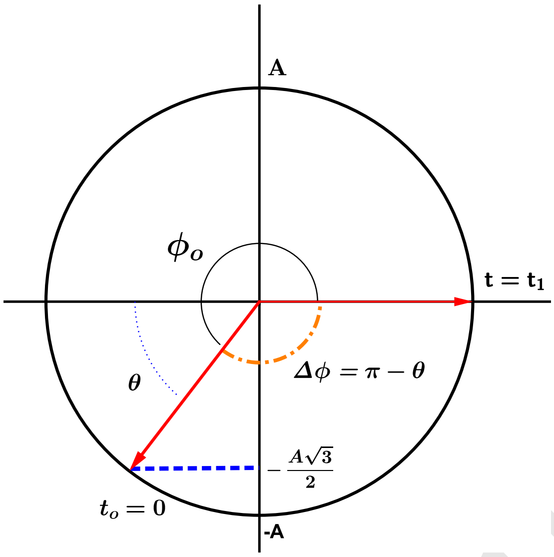
$$x = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right)\ (S.I.)$$

Δ.3 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$ από την θέση στην οποία η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη.

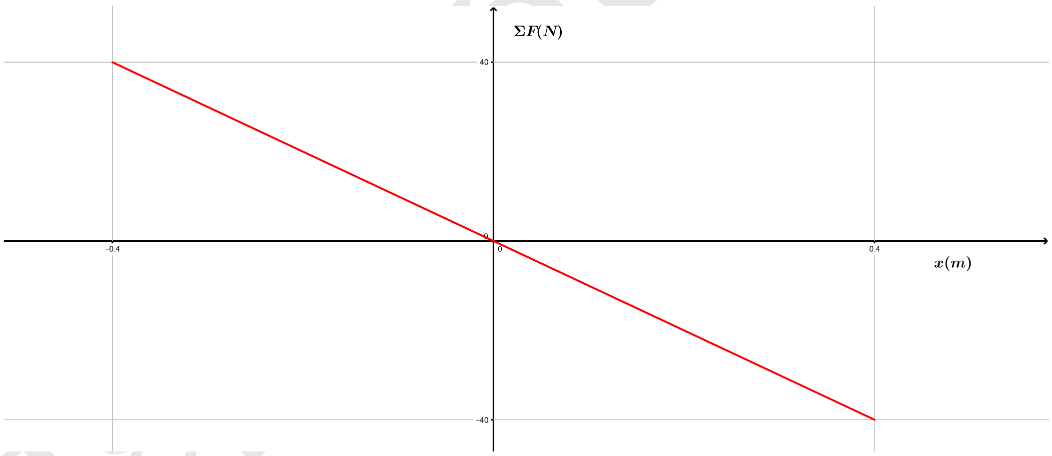
Η θέση μέγιστης κινητικής ενέργειας είναι η Θέση ισορροπίας. Διέρχεται για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$ από την ΘΙΤ με θετική ταχύτητα. Ο υπολογισμός μπορεί εύκολα να γίνει με χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος.

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi - \pi/3}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{15}s$$

* *Η Λύση μπορεί να γίνει και με επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων θέτοντας όπου $x = 0$ στην εξίσωση της απομάκρυνσης και κρατώντας τον μικρότερο χρόνο.*



Δ.4 Να γράψετε την δύναμη επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες το αντίστοιχο διάγραμμα.



Η δύναμη επαναφοράς θα δίνεται από την σχέση

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow \Sigma F = -100x \ (S.I.) \quad -0,4m \leq x \leq 0.4m$$

Δ.5 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από την θέση $x = 0,2m$ για πρώτη φορά.

Με την χρήση της ΑΔΕΤ υπολογίζω την ταχύτητα του σώματος την παραπάνω χρονική στιγμή.

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \upsilon = +\omega\sqrt{A^2 - x^2} = 2\sqrt{3}m/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F\upsilon = Dx\upsilon = 40\sqrt{3}J/s$$

Δ.6 Να υπολογίσετε τον λόγο της μέγιστης δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου προς την μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{U_{\varepsilon\lambda(max)}}{U_{max}} = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta l_{max})^2}{\frac{1}{2}DA^2} = \frac{(\Delta l_o + A)^2}{A^2} = \frac{25}{16}$$