Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Σε κάθε κρούση ανάμεσα σε δύο σώματα μικρών διαστάσεων:

(β) η μεταβολή της ορμής του ενός είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής του άλλου σώματος.

Α.2. Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 Κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες $\upsilon_1 = +5m/s$ και $\upsilon_2 = -8m/s$. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν μετά την κρούση η ταχύτητα της Σ_1 είναι $\upsilon_1' = -13m/s$ τότε η ταχύτητα της Σ_2 μετά την κρούση είναι:

(α) $\upsilon_2' = 0$

Α.3. Μια σφαίρα Σ_1 μάζας m συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $3m$. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες θα έχουν:

(β) αντίθετες ταχύτητες.

Α.4. Δύο σφαίρες, οι οποίες κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με αντίθετες ορμές συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών που μετατρέπεται σε θερμότητα εξαιτίας της κρούσης ισούται με:

(δ) 100%

Α.5.

(α) Στην ανελαστική κρούση δεν ισχύει η διατήρηση της ορμής. **Λάθος**

(β) Όταν δύο σφαίρες με ίσες μάζες συγκρουστούν κεντρικά και ελαστικά ανταλλάσσουν κινητικές ενέργειες. **Σωστό**

(γ) Όταν μια σφαίρα προσπίπτει πλάγια σε έναν τοίχο και συγκρούεται ελαστικά με αυτόν,η δύναμη που δέχεται από τον τοίχο κατά την επαφή, έχει την διεύθυνση της τελικής ταχύτητας του σώματος. **Λάθος**

(δ) Στην έκκεντρη κρούση δύο σφαιριδίων, οι ταχύτητες των σωμάτων βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους. **Λάθος**

(ε) Κατά την σκέδαση δύο υποατομικών σωματιδίων, τα σωματίδια έρχονται σε επαφή μεταξύ τους για ελάχιστο χρονικό διάστημα. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Νετρόνιο ¨συγκρούεται¨ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σωμάτιο - α (πυρήνας ηλίου He_2^4) και επιβραδύνεται. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάνει το νετρόνιο λόγο της κρούσης είναι:

(γ)64%

Να λάβετε υπόψη ότι το πρωτόνιο και το νετρόνιο έχουν περίπου την ίδια μάζα $m_p = m_n = m$.

Λύση

Η μάζα του σωματίου α είναι $m_2 = 2m_p + 2m_n = 4m$. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα μετά την κρούση τα σώματα αποκτούν ταχύτητες υ_1' και υ_2'.

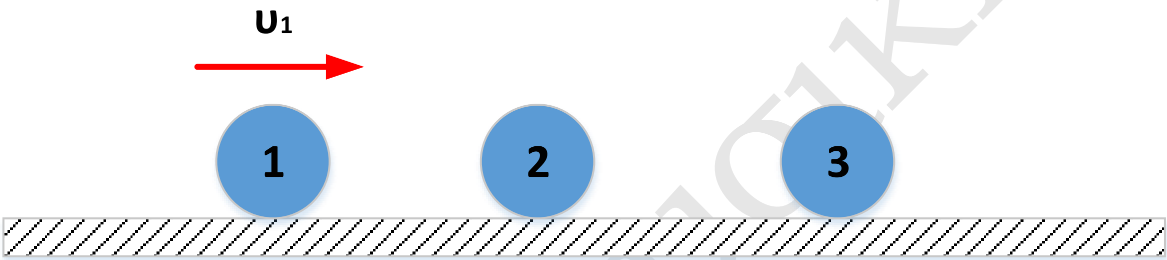
$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{3\upsilon_1}{5}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2\upsilon_1}{5}$$

Το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\frac{K_1' - K_1}{K_1}100\% = [\frac{K_1'}{K_1} - 1]100\% = [\frac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2} - 1]100\% = 64\%$$

Β.2. Τρεις μικρές σφαίρες Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 βρίσκονται ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Οι σφαίρες έχουν μάζες $m_1 = m$, $m_2 = m$ και $m_3 = 3m$ αντίστοιχα.



Δίνουμε στην σφαίρα Σ_1 ταχύτητα μέτρου υ_1 και συγκρούεται ελαστικά με την δεύτερη ακίνητη σφαίρα Σ_2. Στην συνέχεια η δεύτερη σφαίρα Σ_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την τρίτη σφαίρα Σ_3 . Η τρίτη σφαίρα αποκτά τότε ταχύτητα μέτρου υ_3. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $\frac{\upsilon_3}{\upsilon_1}$ είναι:

(β)$\frac{1}{2}$

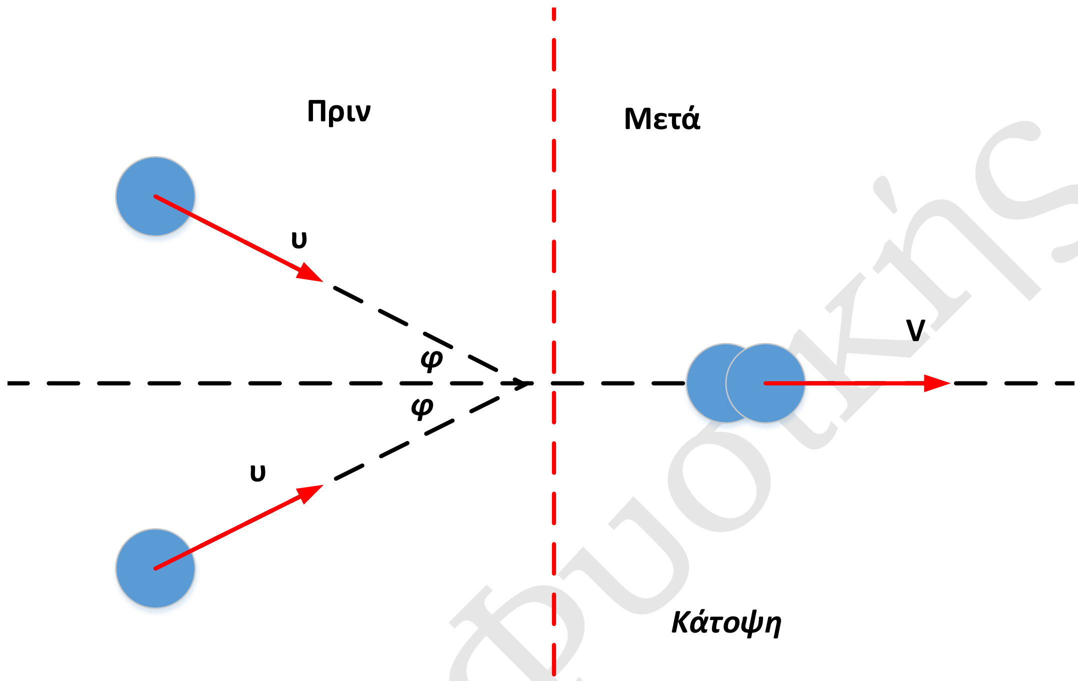
Λύση

Στην πρώτη κρούση τα σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες αφού έχουν τις ίδιες μάζες και συγκρούονται ελαστικά. $\upsilon_1' = 0, \upsilon_2' = \upsilon_1$. *Για την δεύτερη κρούση θα ισχύει:*

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\upsilon_1 = -\frac{\upsilon_1}{2}$$

$$\upsilon_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3}\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1}{2} \Rightarrow \frac{\upsilon_3}{\upsilon_1} = \frac{1}{2}$$

Β.3. Δύο σφαιρίδια ίσων μαζών κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες ίσου μέτρου υ. Οι φορείς των ταχυτήτων τους σχηματίζουν γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα σφαιρίδια συγκρούονται πλαστικά και το συσσωμάτωμα που προκύπτει κινείται στην οριζόντια διεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $V = 0,5\sqrt{3}\upsilon$.

Η γωνία ϕ είναι ίση με:

(γ) 30^o

Λύση

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον οριζόντιο άξονα αφού αναλύσω τις ταχύτητες πριν την κρούση σε συνιστώσες.

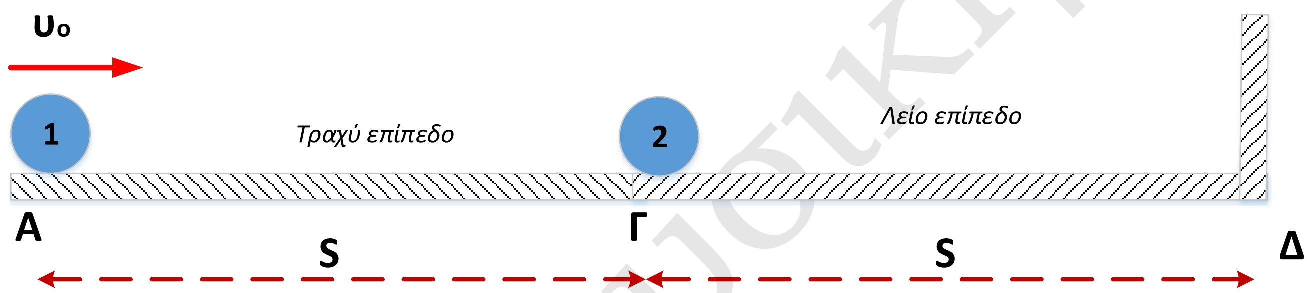
$$m\upsilon_x + m\upsilon_x = 2mV \Rightarrow \upsilon\sigma\upsilon\nu\phi = 0,5\sqrt{3}\upsilon \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = 30^o$$

**Εναλλακτικά μπορώ να χρησιμοποιήσω και την Α.Δ.Ο. στην διανυσματική της μορφή:*

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_k \Rightarrow \sqrt{(m\upsilon)^2 + (m\upsilon)^2 + 2m\upsilon m\upsilon\sigma\upsilon\nu(2\phi)} = 2mV \Rightarrow \ldots$$

Θέμα Γ

Σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 εκτοξεύεται από σημείο Α οριζοντίου δαπέδου με ταχύτητα $\upsilon_o = 10m/s$. Αφού διανύσει διάστημα $S = 18m$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 > m_1$ που ηρεμεί ακίνητο στο σημείο Γ. Μετά την κρούση το Σ_2 κινείται οριζόντια στο λείο τμήμα ΓΔ του επιπέδου και προσκρούει ελαστικά σε κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του τμήματος ΑΓ του επιπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,1$.



Γ.1 Να βρεθεί ο λόγος των μαζών $\dfrac{m_1}{m_2}$, ώστε μετά την πρώτη κρούση οι δύο σφαίρες να αποκτήσουν αντίθετες ταχύτητες.

Το Σ_1 επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής και συγκρούεται με το Σ_1 έχοντας πριν την κρούση ταχύτητα υ_1. Αφού οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι αντίθετες τότε:

$$\upsilon_1' = -\upsilon_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

Γ.2 Να βρεθεί το ποσοστό της Κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταβιβάστηκε στην σφαίρα Σ_2 κατά την κρούση.

Η ταχύτητα του Σ_2 μετά την κρούση θα είναι:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1}{2}$$

$$\frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 \upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2}100\% = 3\frac{(\frac{\upsilon_1}{2})^2}{\upsilon_1^2}100\% = 75\%$$

Γ.3 Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση της σφαίρας Σ_1 από το σημείο Α όταν αυτή ακινητοποιηθεί.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τον υπολογισμό της ταχύτητας υ_1 της Σ_1 πριν την κρούση.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = -TS = -\mu m_1 g S \Rightarrow \upsilon_1 = 8m/s$$

Η ταχύτητα του σώματος μετά την κρούση είναι $|\upsilon_1'| = |\upsilon_2'| = 4m/s$. Εφαρμόζω ένα δεύτερο ΘΜΚΕ μέχρι την ακινητοποίηση του Σ_1 μετά την κρούση.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -TS = -\mu m_1 g S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = 8m$$

Άρα αφού σταματάει στα $0,8m$ αριστερά του Γ απέχει $d = 18 - 8 = 10m$ από το σημείο Α

Γ.4 Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται για να έρθουν οι σφαίρες ξανά σε επαφή. Θα συγκρουστούν ;

Η Σ_2 θα εκτελέσει Ομαλή Κίνηση μέχρι να συγκρουστεί στον κατακόρυφο τοίχο για χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = \dfrac{S}{\upsilon_2'} = 4,5s$. Μετά την κρούση στον τοίχο που η διάρκεια της είναι αμελητέα το μέτρο της ταχύτητας δεν θα αλλάξει, αφού η κρούση είναι ελαστική. Άρα συνεχίζει να κινείται Ομαλά μέχρι το σημείο Γ για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt. Άρα για να επανέλθει στο σημείο Γ απαιτείται χρονικό διάστημα $9s$. Το σώμα θα σταματήσει λόγο της τριβής σε χρονικό διάστημα Δt_2.

$$a = \frac{\Sigma f}{m} = \frac{T}{m} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g = 1m/s^2$$

Ο χρόνος για να σταματήσει θα είναι:

$$0 - \upsilon_2' - a\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 4s$$

Ο χρόνος που απαιτείται για την συνάντηση τους είναι $9 + 4 = 13s$

Η επιβράδυνση θα είναι ίδια και για τα δύο σώματα αφού είναι ανεξάρτητη της μάζας. Άρα τα δύο σώματα θα σταματούν στο ίδιο σημείο αφού έχουν ίδιες αρχικές ταχύτητες όταν ξεκινούν να επιβραδύνονται. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα συναντηθούν με μηδενικές ταχύτητες.

Θέμα Δ

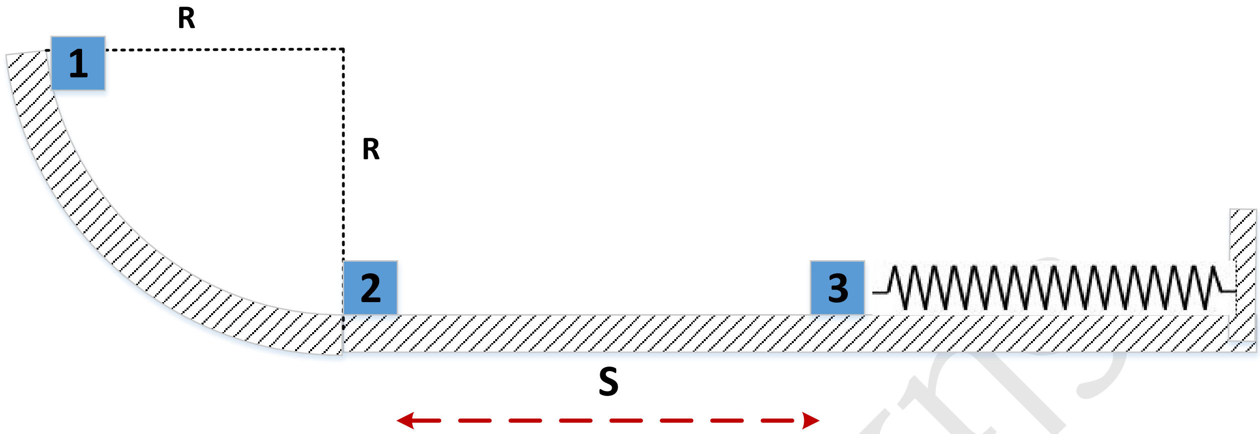
Από την κορυφή λείου κατακόρυφου οδηγού σχήματος τεταρτοκυκλίου και ακτίνας $R = 1,25m$ αφήνεται σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2kg$. Όταν το σώμα φτάνει στην βάση του τεταρτοκυκλίου συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$.

Μετά την κρούση το Σ_2 ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο τραχύ δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_1 = 0,1$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 6kg$, αφού διανύσει απόσταση $S = 3,5m$. Το Σ_3 είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου, που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και έχει το άλλο άκρο του ακλόνητο σε κατακόρυφο τοίχο. Η σταθερά του ελατηρίου δίνεται $k = 112,5N/m$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο συσσωμάτωμα των Σ_2 και Σ_3 με το δάπεδο δίνεται $\mu_2 = 0,125$.

Δ.1 Να βρεθούν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την μεταξύ τους κρούση.

Το Σ_1 *θα αποκτήσει στην βάση του τεταρτοκυκλίου ταχύτητα* υ_1 *με την οποία θα συγκρουστεί ελαστικά με το* Σ_2 *. Με την ΑΔΜΕ μπορούμε να την υπολογίσουμε:*

$$m_1 g R - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gR} = 5m/s$$



Οι ταχύτητες μετά την ελαστική κρούση θα είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -1m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 4m/s$$

Δ.2 Να βρεθεί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου.

Το Σ_2 μετά την κρούση επιβραδύνεται και πριν συγκρουστεί με το Σ_3 έχει ταχύτητα υ την οποία θα βρω με ΘΜΚΕ κατά την επιβράδυνση του πριν την κρούση.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -TS = -\mu_1 m_2 g S \Rightarrow \upsilon = 3m/s$$

Για την πλαστική κρούση που ακολουθεί εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής, ώστε να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$m_2\upsilon = (m_2 + m_3)\upsilon_k^2 \Rightarrow \upsilon_k = 1m/s$$

Το συσσωμάτωμα επιβραδύνεται μετά την κρούση εξαιτίας της τριβής και της δύναμης από το ελατήριο που συσπειρώνεται. Στην μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου το συσσωμάτωμα στιγμιαία σταματάει, έχοντας διανύσει *διάστημα* d. *Για να βρω την μέγιστη συσπείρωση* ($\Delta l_{max} = d$)*εφαρμόζω το ΘΜΚΕ.*

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_k^2 = W_T + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_k^2 = -\mu_2(m_2 + m_3)gd + 0 - \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow$$

$$112,5d^2 + 22,5d - 9 = 0 \Rightarrow d = 0,2m$$

Δ.3 Να βρεθεί το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του Σ_1 που μετατράπηκε σε ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου, όταν το ελατήριο είναι στην θέση μέγιστης παραμόρφωσης.

$$\frac{U_{\varepsilon\lambda}}{E_{\mu\eta\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}kd^2}{m_1 gR}100\% = 9\%$$

Δ.4 Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ_1 την στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος μετά την κρούση του με το Σ_2.

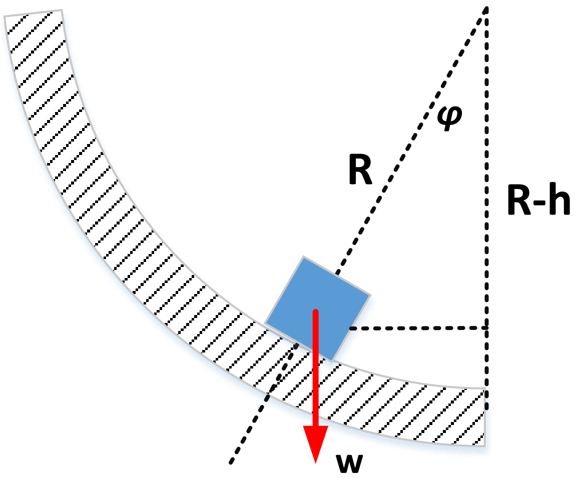
Το Σ_1 *φτάνει στο μέγιστο ύψος όταν ακινητοποιείται στιγμιαία. Το ύψος αυτό μπορεί να υπολογιστεί με την ΑΔΜΕ.*

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1 gh \Rightarrow h = 0,05m$$

Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:

$$|\frac{dP}{dt}| = |\Sigma F| = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \Sigma F_x = w_x = m_1 g\eta\mu\phi = 2\sqrt{6}kgm/s$$

**Σημειώνω ότι η* ΣF_y *είναι κάθετη στην ταχύτητα και παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης η οποία έχει στιγμιαία μηδενιστεί στο μέγιστο ύψος.*



* *Το* $\eta\mu\phi$ *θα υπολογιστεί από το σχήμα:*

$$\eta\mu\phi = \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2)}}{R}$$

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός