Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κύματα - Φαινόμενο Doppler

Ενδεικτικές Λύσεις - Β έκδοση

Θέμα Α

Α.1. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κύματα με ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα και αντίθετες ταχύτητες. Δύο σημεία Μ και Ν βρίσκονται εκατέρωθεν ενός σημείου Λ που παραμένει συνεχώς ακίνητο. Τα σημεία απέχουν απόσταση $\frac{\lambda}{3}$, όπου λ το μήκος κύματος. Οι ταλαντώσεις των σημείων Μ και Ν :

(β) βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

Α.2. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων ταλαντώνονται στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού με εξίσωση ταλάντωσης $y_1 = y_2 = A\eta\mu(\omega t)$. Σε ένα σημείο Σ, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές βρίσκεται ένας φελλός, ο οποίος ξεκινά την ταλάντωση του όταν η φάση της πηγής 1 έχει μεταβληθεί κατά 4π.

Η χρονική εξίσωση ταλάντωσης του φελλού μετά την συμβολή είναι :

$$y = A'\eta\mu(\omega t - 8\pi) \quad (S.I)$$

Η θέση του Σ (r_1, r_2) σε σχέση με τις δύο πηγές θα είναι :

(β) $2\lambda, 6\lambda$

Α.3. Περιπολικό ακολουθεί αυτοκίνητο που έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας. Τα δύο αυτοκίνητα κινούνται με ίσες ταχύτητες. Αν η σειρήνα του περιπολικού εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S, τότε, η συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του άλλου αυτοκινήτου είναι :

(γ) $f_A = f_S$

Α.4. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας f και μήκους κύματος λ, με θετική ταχύτητα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο Μ ($x = +\lambda$) ξεκινά την ταλάντωση του κινούμενο προς την ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης του. Η φάση του αρμονικού κύματος είναι:

$$\textbf{(γ)}\ \phi = 2\pi(ft - \frac{x}{\lambda} + \frac{3}{2})$$

Α.5.

(α) Κατά την διάδοση ενός αρμονικού κύματος παρατηρείται μεταφορά ύλης από ένα σημείο σε ένα άλλο. **Λάθος**

(β) Αν διπλασιάσουμε την συχνότητα ενός αρμονικού κύματος, διπλασιάζεται τόσο η ταχύτητα ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου, όσο και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. **Λάθος**

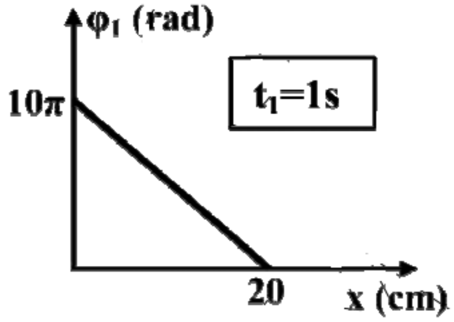
(γ) Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται μόνο στα στερεά. **Λάθος**

(δ) Το φαινόμενο Doppler χρησιμοποιήθηκε στην κοσμολογία για την απόδειξη της διαστολής του σύμπαντος. **Σωστό**

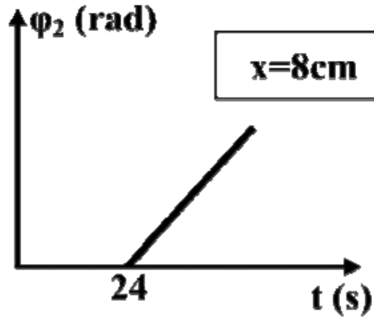
(ε) Όταν ένας παρατηρητής πλησιάζει μια ηχητική πηγή αντιλαμβάνεται μεγαλύτερη ταχύτητα για τον ήχο, εξαιτίας της σχετικής κίνησης. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Τα άκρα $O_1(x = 0)$ και $O_2(x = 0)$ δύο γραμμικών ελαστικών μέσων 1 και 2 αντίστοιχα εκτελούν ταλάντωση σύμφωνα με την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$ και παράγονται εγκάρσια κύματα. Στο **σχήμα 1** φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων του ελαστικού μέσου του κύματος 1 σε συνάρτηση με την θέση x των σημείων αυτών την χρονική στιγμή $t_1 = 1s$. Στο **σχήμα 2** φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τον χρόνο στον οποίο διαδίδεται κύμα, ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = 8cm$ του ελαστικού μέσου 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Αν το κύμα διαδίδεται στο μέσο 1 με ταχύτητα υ_1 και στο μέσο 2 με ταχύτητα υ_2, ο λόγος των μέτρων των δύο ταχυτήτων $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ των μέτρων των δύο ταχυτήτων διάδοσης τω ν κυμάτων είναι:

$$\textbf{γ.}\ \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 60$$

Από το Σχήμα 1 προκύπτει:

$$\upsilon_1 = \frac{x}{t} = 20m/s$$

Από το Σχήμα 1 προκύπτει:

$$\upsilon_2 = \frac{x}{t} = \frac{1}{3}m/s$$

Β.2. Διαθέτουμε δύο πανομοιότυπες χορδές (1) και (2). Στην χορδή (1) στερεώνουμε ακλόνητα τα άκρα της και δημιουργούμε με κατάλληλο τρόπο στάσιμο κύμα με Ν συνολικά κοιλίες, οι οποίες έχουν συχνότητα ταλάντωσης f_1 η καθεμία.

Στη χορδή (2) στερεώνουμε ακλόνητα το ένα άκρο της ενώ το άλλο άκρο της είναι ελεύθερο και δημιουργούμε με κατάλληλο τρόπο στάσιμο κύμα, οπότε το ελεύθερο άκρο της είναι κοιλία. Αν ο συνολικός αριθμός των κοιλιών στην χορδή (2) είναι επίσης Ν και η συχνότητα ταλάντωσης τους f_2 τότε ισχύει:

(β) $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{2N}{2N-1}$

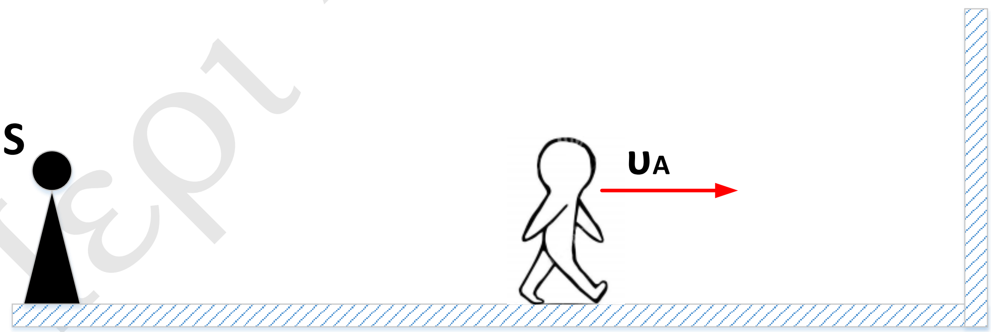
Για την χορδή 1 που έχει στερεωμένα τα δύο άκρα της $L = N\dfrac{\lambda_1}{2}$. *Ενώ για την χορδή 2 που έχει το ένα άκρο στερεωμένο* $L = (N-1)\dfrac{\lambda_2}{2} + \dfrac{\lambda_2}{4}$, *όπου βέβαια* L *το μήκος της χορδής.*

$$N\frac{\lambda_1}{2} = (N-1)\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{N}(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{2N-1}{2N}$$

Αφού $\upsilon_\delta = \lambda f$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2N}{2N-1}$$

Β.3. Ο παρατηρητής του σχήματος απομακρύνεται από την ακίνητη ηχητική πηγή **S** με ταχύτητα υ_A. Η διαφορά των συχνοτήτων των ήχων που ακούει ο παρατηρητής απευθείας και από ανάκλαση ισούται με το 3% της συχνότητας που η πηγή εκπέμπει. Ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα:



(α) $\dfrac{1,5}{100}\upsilon_{\eta\chi}$

Ο παρατηρητής θα ακούει απευθείας από την πηγή ήχο συχνότητας f_1:

$$f_1 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s$$

Στο τοίχο θα ανακλάται ήχος συχνότητας f_s αφού δεν υπάρχει σχετική κίνηση ανάμεσα στον τοίχο και τον παρατηρητή. Ο παρατηρητής θα ακούει από την ανάκλαση ήχο συχνότητας f_2:

$$f_2 = \frac{\upsilon_{\text{ηχ}} + \upsilon_A}{\upsilon_{\text{ηχ}}} f_s$$

Από τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$$f_1 - f_2 = \frac{3}{100} fs \quad \Rightarrow \frac{\upsilon_{\text{ηχ}} + \upsilon_A}{\upsilon_{\text{ηχ}}} f_s - \frac{\upsilon_{\text{ηχ}} - \upsilon_A}{\upsilon_{\text{ηχ}}} f_s = \frac{3}{100} f_s$$
$$\Rightarrow \frac{2\upsilon_A}{\upsilon_{\text{ηχ}}} = \frac{3}{100} \Rightarrow \upsilon_A = \frac{1,5}{100} \upsilon_{\text{ηχ}}$$

Θέμα Γ

Σε ένα γραμμικό μέσο που συμπίπτει με τον ημιάξονα Ox διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα προς αντίθετες κατευθύνσεις. Η εξίσωση του ενός αρμονικού κύματος είναι:

$$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(t - \frac{x}{2}) \quad (S.I)$$

Από την συμβολή των δύο κυμάτων δημιουργείται στο ελαστικό μέσο στάσιμο κύμα, με κοιλία στο Ο ($x = 0$).

Γ.1 Να γράψετε την εξίσωση του άλλου τρέχοντος κύματος ($y_2 = f(t)$) που συμβάλλει, καθώς και την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται.

Από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $\omega = 2\pi rad/s \Rightarrow f = 1Hz, \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \lambda = 2m$

Το δεύτερο κύμα θα είναι:

$$y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(t + \frac{x}{2}) \quad (S.I)$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu(\pi x)\eta\mu(2\pi t) \quad (S.I.)$$

Γ.2 Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ του μέσου που βρίσκεται στην θέση $x_K = 4,25m$.

$$y_k = 0,4\sigma\upsilon\nu(4,25\pi)\eta\mu(2\pi t) \Rightarrow y_k = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(2\pi t) \quad (S.I.)$$

$$v_k = 0,4\pi\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(2\pi t) \quad (S.I.)$$

$$\alpha = -0,8\pi^2\sqrt{2}\eta\mu(2\pi t) \quad (S.I.)$$

Γ.3 Να υπολογίσετε τον αριθμό των σημείων που παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων ανάμεσα στο σημείο Κ και το σημείο Λ ($x_\Lambda = 6,25m$).

Για να παραμένουν ακίνητα θα πρέπει να είναι δεσμοί του στάσιμου κύματος δηλαδή σε θέση $x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4}$

$$4,25 < x < 6,25 \Rightarrow 4,25 < (2\kappa + 1)0,5 < 6,25$$

$$8,5 < 2\kappa + 1 < 12,5 \Rightarrow 3,75 < \kappa < 5,25 \Rightarrow \kappa = 4,5$$

Άρα είναι 2 σημεία.

Γ.4 Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου Λ από την θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το σημείο Κ φτάνει στην θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

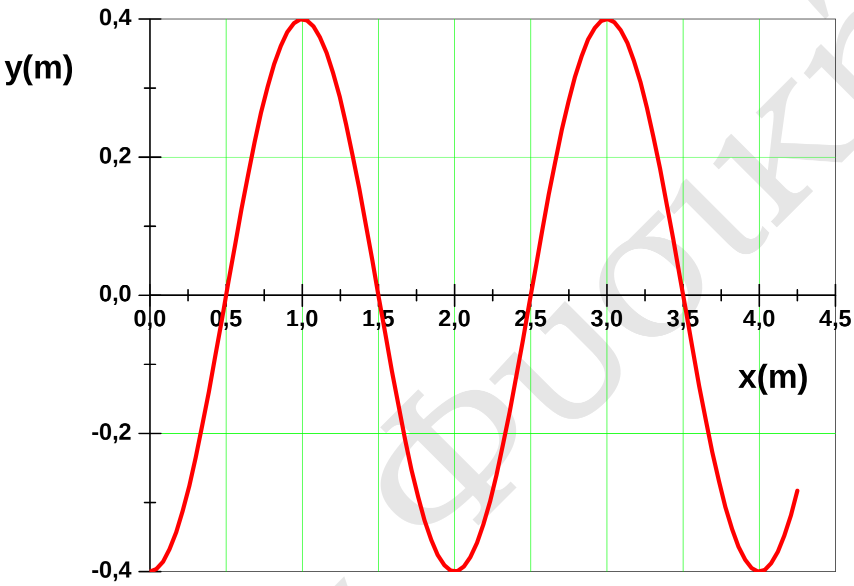
η εξίσωση ταλάντωσης του Λ είναι :

$$y_\Lambda = 0,4\sigma\upsilon\nu(6,25\pi)\eta\mu(2\pi t) \Rightarrow y_k = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(2\pi t) \quad (S.I.)$$

Τα δύο σημεία θα βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, άρα σε κάθε χρονική στιγμή θα έχουν ίσες απομακρύνσεις.

Γ.5 Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \dfrac{3T}{2}$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΟΚ).

Την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \dfrac{3T}{2}$ το Κ θα βρίσκεται στην θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης.



Θέμα Δ

Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon = 5m/s$. Μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο Σ της επιφάνειας πλησιέστερα στην πηγή Π_2. Η απομάκρυνση του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο περιγράφεται από τη γραφική παράσταση του σχήματος. Οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και εκτελούν ταλαντώσεις της μορφής $y = A\eta\mu\omega t$.

Δ.1 Να βρείτε τις αποστάσεις r_1 και r_2 του σημείου Σ από τις πηγές Π_1 και Π_2, αντίστοιχα.

Από το διάγραμμα προκύπτει: $3T = 1,2 \Rightarrow T = 0,4s \Rightarrow f = 2,5Hz$, $A = 5mm$. *Άρα* $\lambda = vT = 2m$. *Επίσης το πρώτο κύμα φτάνει την στιγμή* $t_1 = 0,2s$ *και το δεύτερο κύμα την στιγμή* $t_2 = 1,4s$.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι: $r_1 = vt_1 = 1m$ *και* $r_2 = vt_2 = 7m$.

Δ.2 Να γράψετε τη σχέση που δίνει την απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο, για $t \geq 0$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται στο $S.I.$:

- $y = 0$ για $0 < t < 0,2s$
- $y = 5 \cdot 10^{-3}\eta\mu\pi(5t - 1)$ για $0,2s \leq t < 1,4s$
- $y = -10 \cdot 10^{-3}\eta\mu\pi(5t - 4)$ για $t \geq 1,4s$

Δ.3 Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του φελλού κάποια χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του είναι $y = 5\sqrt{3} \cdot 10^{-3}m$

Εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας ταλάντωσης για την ταλάντωση μετά την συμβολή:

$$\frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dy_1^2 \Rightarrow v_1 = \pm\omega\sqrt{A'^2 - y_1^2} \Rightarrow y_1 = 2,5\pi \cdot 10^{-2}m/s$$

Δ.4 Έστω K_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια του φελλού μετά τη συμβολή. Αλλάζουμε τη συχνότητα των ταλαντώσεων των πηγών Π_1 και Π_2 έτσι ώστε η συχνότητά τους να είναι ίση με τα $\frac{10}{9}$ της αρχικής τους συχνότητας. Αν μετά τη νέα συμβολή η μέγιστη κινητική ενέργεια του φελλού είναι K_2, να βρεθεί ο λόγος $\frac{K_1}{K_2}$

Η μεταβολή της συχνότητας έχει ως συνέπεια την μεταβολή του μήκους κύματος, άρα και του πλάτους ταλάντωσης του σημείου($|r_1 - r_2| = 6$*).*

$$f' = \frac{10}{9}f \Rightarrow \frac{v}{\lambda'} = \frac{10}{9}\frac{v}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = 0,9\lambda \Rightarrow A' = 2A|\sigma\upsilon\nu(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda'})| = A$$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι ίσος με:

$$\frac{K_{1max}}{K_{2max}} = \frac{\frac{1}{2}D_1(2A)^2}{\frac{1}{2}D_2A^2} = \frac{\frac{1}{2}m2\pi f'(2A)^2}{\frac{1}{2}m2\pi f A^2} = \frac{81}{25}.$$

Δ.5 Αν η απόσταση των δύο πηγών είναι $d = 2\lambda$ να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων στο ευθύγραμμο τμήμα που τις ενώνει, που θα παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

Για ένα σημείο αποσβεστικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές πρέπει να ισχύει.

$$r_1 + r_2 = d = 2\lambda \quad \text{και} \quad r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$
$$r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \lambda \Rightarrow r_1 = N\frac{\lambda}{2} + \frac{3\lambda}{4}$$
$$0 \le r_1 \le d \Rightarrow 0 \le N\frac{\lambda}{2} + \frac{3\lambda}{4} \le 2\lambda \Rightarrow -1,5 \le N \le 2,5$$

Άρα $(N = -1, 0, 1, 2)$ 4 υπερβολές αποσβεστικής συμβολής

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός